Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 13

Propriétés spectrales des opérateurs

Séance du 23 mai 2018

Solution 1. *Échauffement*

Soit $u \in \mathcal{I}$ non nul. Il existe donc $x_0, y_0 \in H$, tous deux non nuls, tels que $u(x_0) = y_0$. Si $x \in H$ est de norme 1, notons

$$v_1 : h \mapsto (h|x)x_0,$$
$$v_2 : h \mapsto \left(h\middle|\frac{y_0}{\|y_0\|^2}\right)x.$$

Alors $v_2 \circ u \circ v_1 =: p_x$ vérifie $p_x \in \mathcal{I}$ (puisque $\mathcal{I}$ est bilatère), et p_x est la projection sur $\operatorname{Vect} x$. Soit maintenant $v \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini, et soit $(x_1, \ldots, x_N)$ une base orthonormale de son noyau. Alors $v = (p_{x_1} + \ldots + p_{x_N}) \circ v \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I}$ contient tous les opérateurs de rang fini, et comme $\mathcal{I}$ est fermé en norme, et que dans les Hilbert, l'ensemble des opérateurs compacts est *exactement* l'adhérence (pour la norme subordonnée) de l'ensemble des opérateurs de rang fini, $\mathcal{I}$ contient donc $\mathcal{K}(H)$, l'ensemble des opérateurs compacts.

⋆

Solution 2. *Opérateur de Volterra*

1. Observons que si $f \in E$, et $x, y \in [0,1]$,

$$|V(f)(x)| \leq \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2},$$
$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leq \|f\|_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}},$$

donc V est à valeurs dans les fonctions continues bornées (en particulier, $V : E \to E$ est continue, puisque l'injection $L^\infty([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ l'est). D'autre part, les estimées ci-dessus permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli à $V(B_E)$, qui est donc relativement compacte dans $C([0,1])$, et par suite dans E.

Comme V est compact, son spectre contient 0. Par ailleurs, on sait que si $\lambda \in \operatorname{Sp}(V) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre (et de multiplicité finie). Or si $V(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$, alors f est continue (dans l'image de V), donc dérivable, et $f' = f/\lambda$. Comme $f(0) = 0$, cela impose $f \equiv 0$, et donc λ n'est pas valeur propre. Ainsi $\operatorname{Sp}(V) = \{0\}$.

2. Introduisons la fonction K définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On écrit ainsi V comme un opérateur à noyau : $V(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$. De la sorte, si $f, g \in E$, grâce au théorème de Fubini,

$$\langle V(f), g\rangle = \iint_{[0,1]^2} K(x,y)f(y)g(x)dxdy = \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 K(x,y)g(x)dx\right)dy = \langle f, V^*(g)\rangle,$$

et donc $V^*(g)(y) = \int_0^1 K(x,y)g(x)dx = \int_y^1 g(x)dx$.

3. VV^* est un opérateur autoadjoint, compact et positif. La théorie spectrale pour ces opérateurs nous dit donc que $\|VV^*\|$ est égale à sa plus grande valeur propre. Soit donc $f \in E$ et $\lambda > 0$ tels que $VV^*(f) = \lambda f$. Alors $\lambda f'' = f$. Posons $\mu := 1/\sqrt{\lambda}$. On sait que f est de la forme $f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$. Or $f(0) = A = 0$, et $f'(0) = B\mu = \lambda^{-1}\int_0^1 f = \lambda^{-1}\frac{B}{\mu}(1-\cos(\mu))$. Cela prouve que l'on doit avoir $\cos(\mu) = 0$, et donc $\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}$. Donc la plus grande valeur propre correspond au plus petit μ, c'est-à-dire à $\mu = \frac{\pi}{2}$, ou encore $\lambda = \frac{4}{\pi^2}$.

Or, c'est un fait général que pour tout opérateur continu A sur un Hilbert, $\|A\|^2 = \|A^*A\|$. En effet, si x est de norme 1,

$$\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle A^*A(x), x\rangle,$$

donc $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$, et l'autre inégalité est triviale. On applique cette propriété à $A = V^*$, et on trouve donc $\|V^*\| = \|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

Solution 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas valeur propre de A, cela signifie que $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$. Soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Supposons que λ ne soit pas dans le spectre de $A + K$: il existe alors un opérateur inversible S tel que $(A+K-\lambda I)S = I$. Cela signifie en particulier que $(A-\lambda I)S = I - KS$. Comme $\ker(A-\lambda I) = \{0\}$, et que S est injective, on en déduit que $I - KS$ est aussi injective. Donc elle est surjective, grâce à l'alternative de Fredholm (puisque KS est compact). Donc $A - \lambda I$ est également surjective, ce qui signifie que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

⋆

Solution 4. *Calculs de spectre*

1. Remarquons que $\|T\| = 1$. On en déduit déjà que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$, le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Cherchons déjà si T admet des valeurs propres. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| \leq 1$. L'équation $Tu = \lambda u$ implique que $u_1 = \lambda u_0$, $u_2 = \lambda u_1$, et ainsi de suite. Notons donc $u^\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Si $|\lambda| < 1$, alors $u^\lambda \in \ell^1$, et donc λ est valeur propre de T (le sous-espace propre associé est même de dimension 1). En revanche, si $|\lambda| = 1$, alors $u^\lambda \notin \ell^1$, et donc T n'admet pas λ pour valeur propre. Or on sait que $\mathrm{Sp}(T)$ est fermé. Donc $\mathrm{Sp}(T) = \overline{D}(0,1)$.

L'opérateur $T^* : \ell^\infty \to \ell^\infty$, $(u_0, u_1, \ldots) \mapsto (0, u_0, u_1, \ldots)$. On a également $\|T^*\| = 1$. Or T^* n'a pas de valeur propre. En revanche, c'est un fait général dans les Banach que $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(T^*)$. (Prouvons-le, pour mémoire : quitte à retrancher ou ajouter $\lambda\,\mathrm{id}$, il suffit de vérifier que T est inversible si et seulement si T^* est inversible. Dans un sens, c'est facile, car si $RT = TR = \mathrm{id}$, alors $T^*R^* = R^*T^* = \mathrm{id}$. Réciproquement, si T^* est surjective, alors on a $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^\perp = \{0\}$; et si T^* est inversible, il existe $c > 0$ tel que $\forall y^* \in X^*$, $\|T^*(y^*)\| \geq c\|y^*\|$, mais on a vu dans le TD n° 12 que cela implique que T est surjective.)

2. Observons que T est isométrique. Donc $\|T\| = 1$, et $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Commençons par chercher les valeurs propres de T. Supposons que λ ne soit pas de module 1, *i.e.* $|\lambda| < 1$. Alors l'égalité $\lambda f(x) = f(x+1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leq \lambda^n \|f\|_{L^\infty}$, et donc, en faisant tendre n vers l'infini à x fixé, on trouve que $f \equiv 0$. Donc λ n'est pas valeur propre de T. En revanche, si $|\lambda| = 1$, écrivons $\lambda = e^{i\theta}$. La fonction $f(x) = e^{i\theta x}$ est alors vecteur propre de T, associé à la valeur propre λ.

Or T est inversible, d'inverse $S : E \to E$, $f \mapsto f(\cdot - 1)$. On a aussi $\|S\| = 1$. D'autre part, $T - \lambda\,\mathrm{id} = -\lambda T(S - \lambda^{-1}\,\mathrm{id})$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ si et seulement si $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(S)$. Or

$\mathrm{Sp}(S) \subseteq \overline{D}(0,1)$, ce qui achève de prouver que $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. C'est aussi l'ensemble de ses valeurs propres.

⋆

Solution 5. *Rayon spectral*

1. C'est un exercice classique. Posons $\ell := \inf_n \frac{a_n}{n}$, et supposons $\ell > -\infty$ pour simplifier. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{a_N}{N} \leq \ell + \varepsilon$. Si $n \gg N$, on peut faire la division euclidienne de n par N, et l'on trouve $n = qN + r$, avec $q \geq 1$, et $0 \leq r < N$. En particulier, $a_n \leq qa_N + a_r$. On a donc

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{qa_N + a_r}{qN + r} \leq \frac{a_N}{N} + \frac{a_r}{qN} \leq 2\varepsilon,$$

si q est assez grand (*i.e.* si $n \geq \varepsilon^{-1} \max_{j=0,\ldots,N-1} |a_j|$). Cela prouve que $\frac{a_n}{n} \to \ell$.

2. On suppose que T n'est pas nilpotent (*i.e.* $T^j \neq 0$ pour tout j), sans quoi le résultat est évident. Posons $b_n := \|T^n\|$. Pour tout $n, m \geq 0$, $b_{n+m} = \|T^{n+m}\| \leq \|T^n\|\|T^m\| = b_n b_m$. On pose alors $a_n = \log b_n$, qui est bien définie, et forme une suite sous-additive. Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$. Alors $\exp(\frac{a_n}{n}) = b_n^{1/n} = \|T^n\|^{1/n}$ converge vers e^ℓ.

3. Si X est un Hilbert, et si T est hilbertien (c'est-à-dire $T^* = T$), alors

$$\|T\|^2 = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|^2 = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*T\| = \|T^2\|.$$

Par ailleurs, on a bien sûr $\|T^2\| \leq \|T\|^2$, puisque $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, donc lorsque T est hermitien, $\|T^2\| = \|T\|^2$. Dès lors, si on considère la sous-suite $\{b_{2^n}\}$ (avec les notations de la question précédente), on voit que celle-ci est constante, égale à $\|T\|$. Cela implique donc que $r(T) = \|T\|$.

4. Supposons que la série donnée par $R_z(T)$ converge absolument. Alors $R_z(T)$ définit un élément de $\mathcal{L}(X)$. De plus, $(\frac{1}{z}I - T)R_z(T) = I$ et $R_z(T)(\frac{1}{z}I - T) = I$, ce qui prouve que $1/z \notin \mathrm{Sp}(T)$. Or la formule qui définit $R_z(T)$ est une série entière, donc son rayon de convergence R est donné par la formule de d'Alembert, et vérifie

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k-1}} = r(T).$$

Cela prouve que $\max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(T)} |\lambda| \leq r(T)$, et si l'inégalité était stricte, par la propriété d'unique continuation holomorphe, la formule donnant $R_z(T)$ resterait valable au-delà de $|z| = 1/r(T)$, ce qui contredit la définition du rayon de convergence. On a donc $r(T) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(T)} |\lambda|$.

⋆

Solution 6. *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

1. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Décomposons le polynôme $P - \mu$ en produit de facteurs irréductibles, soit $P(X) - \mu = \prod_j (X - \alpha_j)$. En évaluant cette égalité en A, on voit que nécessairement, l'un des α_j est dans $\mathrm{Sp}(A)$, sinon le produit de droite est inversible. Notons-le α_{j_0}. On a donc $P(\alpha_{j_0}) - \mu = 0$, c'est-à-dire $\mu \in P(\mathrm{Sp}(A))$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors écrivons $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda) \cdot \prod_j (X - \kappa_j)$, de sorte que $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I) \prod_j (A - \kappa_j I) = \left(\prod_j (A - \kappa_j I)\right)(A - \lambda I)$. Cela prouve que $P(A) - P(\lambda)I$ ne peut pas être inversible, *i.e.* que $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Ainsi $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$.

2. On sait que A est hermitien, donc pour tout polynôme P, on a $(P(A))^* = \bar{P}(A)$. Ainsi

$$\|P(A)\|_{\mathcal{L}(H)}^2 = \|(P(A))^* P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)},$$

où la dernière égalité provient de ce que $P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres. Or d'après l'exercice précédent,

$$\begin{aligned}\|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)} &= r((P\bar{P})(A)) \\ &= \max_{\mu \in \mathrm{Sp}((P\bar{P})(A))} |\mu| \\ &= \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |(P\bar{P})(\lambda)| \\ &= \||P|^2\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))} = \|P\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))}^2,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Or $\mathrm{Sp}(A)$ est compact. Donc d'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes sur $\mathrm{Sp}(A)$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathrm{Sp}(A)$, pour la norme uniforme, et $\mathcal{L}(H)$ est complet. L'isométrie $P \mapsto P(A)$ se prolonge ainsi de manière unique en une application

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A)) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ \qquad\qquad f \longmapsto f(A) \end{cases}$$

également isométrique.

⋆

Solution 7. *Matrice de Hilbert*

1. Pour tout $n \geq 1$, grâce à l'inéaglité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{u_p}{n+p} \right|^2 \leq \left(\sum_{p=1}^{\infty} |u_p|^2 \right) \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^2} \right) \leq \|u\|_{\ell^2}^2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \right) < +\infty,$$

donc T est bien défini.

2. Si φ est comme dans l'énoncé, on a $\widehat{\varphi}(0) = 0$. Si maintenant $n \in \mathbb{Z}$, avec $n \neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-inx}}{2i\pi n} \varphi(x) \right]_{x=0}^{2\pi} + \frac{1}{2i\pi n} \int_0^{2\pi} \underbrace{\varphi'(x)}_{=-i} e^{-inx} dx \\ &= \frac{\varphi(0^+) - \varphi(2\pi^-)}{2i\pi n} \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Venons-en à présent à l'intégrale de l'énoncé. On peut la majorer grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et à l'identité de Parseval : en notant

$$A(t) := \sum_{k=1}^{K} a_k e^{-ikt}, \quad B(t) := \sum_{j=1}^{J} b_j e^{ijt},$$

on a

$$\|A\|_{L^2([0,2\pi])} = \left(\sum_{k=1}^{K} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|B\|_{L^2([0,2\pi])} = \left(\sum_{j=1}^{J} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)A(t)\overline{B(t)}dt\right| &\leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty}}{2\pi}\int_0^{2\pi} |A(t)B(t)|dt \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|A\|_{L^2}\|B\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|a\|_{\ell^2}\left(\sum_{j=1}^{J} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Or, par définition des coefficients de Fourier et grâce au calcul précédent, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)A(t)\overline{B(t)} &= \sum_{j,k} \widehat{\varphi}(k+j)a_k\overline{b_j} \\ &= \sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{k+j}\right)\overline{b_j} \\ &=: \langle f, b\rangle_{\mathbb{C}^J},\end{aligned}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^J}$ désigne le produit hermitien standard dans $\mathbb{C}^J$, et où

$$f = (f_j), \quad f_j := \sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{k+j}, \quad j = 1, \ldots, J.$$

On a prouvé que si $\|b\|_{\mathbb{C}^J} \leq 1$, alors $|\langle f, b\rangle_{\mathbb{C}^J}| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|a\|_{\ell^2}$. Par dualité (ou dans ce cas en dimension finie, en choisissant simplement $b = f/\|f\|_{\mathbb{C}^J}$), on trouve

$$\|f\|_{\mathbb{C}^J}^2 = \sum_{j=1}^{J}\left|\sum_{k=1}^{K} \frac{a_k}{k+j}\right|^2 \leq \|\varphi\|_{L^\infty}^2\|a\|_{\ell^2}^2 = \pi^2\|a\|_{\ell^2}^2.$$

En faisant d'abord tendre $K \to +\infty$, puis $J \to +\infty$, on trouve que

$$\|Ta\|_{\ell^2} \leq \pi\|a\|_{\ell^2},$$

donc $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$. En fait, il est possible de prouver que $\|T\| = \pi$.

3. Pour prouver que T n'est pas compact, considérons la suite de ℓ^2 donnée par

$$u^n := \frac{1}{\sqrt{n}}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ termes}}, 0, 0, \ldots).$$

Alors $\|u^n\|_{\ell^2} = 1$ et $u^n \rightharpoonup 0$ (en voyant que si $a \in \ell^2$ est une suite presque nulle, alors $\langle u^n, a\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$, puis en utilisant la densité de telles suites et la borne uniforme ℓ^2 sur u^n). Si T était compact, on aurait alors $Tu^n \to 0$ fortement dans ℓ^2.

Or

$$Tu^n = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+k}\right\}_{k\geq 1},$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t+k} \geq \log\left(1 + \frac{n}{k+1}\right).$$

On trouve donc

$$\|Tu^n\|_{\ell^2}^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{k \geq 1} \log\left(1 + \frac{n}{k+1}\right)^2 \geq \frac{n-1}{n} \log(2)^2 \longrightarrow \log(2)^2.$$

Donc T n'est pas compact.

⋆