Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 13

Opérateurs

Séance du 13 mai 2019

Solution 1. *Question de cours : relations entre noyau et image*

1. Soit $x \in \ker T$ et $e \in \operatorname{Im} T^*$. Il existe alors $f \in D(T^*) \subset F^*$ tel que $T^* f = e$. On a ainsi $\langle e, x\rangle = \langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = 0$. Cela prouve que $\ker T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp$.

Ensuite, si $f \in \ker T^*$ et si $y = Tx$ pour un certain $x \in E$, alors $\langle f, y\rangle = \langle f, Tx\rangle = \langle T^* f, x\rangle = 0$. Inversement, si $f \in F^*$ est tel que $f \equiv 0$ sur $\operatorname{Im} T$, alors pour tout $x \in D(T)$, $0 = \langle f, Tx\rangle$, donc $f \in D(T^*)$ et $0 = \langle T^* f, x\rangle$ pour tout $x \in D(T)$, ce qui veut dire que $T^* f = 0$ dans E^*, par densité de $D(T)$ dans E. Cela prouve que $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

Pour les deux autres inégalités, il suffit de prendre l'orthogonal, et donc de prouver que si $M \subset F$ et $N \subset E^*$ sont des sous-espaces vectoriels, alors $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$, et $(N^\perp)^\perp \supset \overline{N}$. En effet, si $f \in M^\perp$, alors f est une forme linéaire continue qui s'annule sur M, donc f s'annule aussi sur $\overline{M}$. Ainsi $(M^\perp)^\perp \supset \overline{M}$. Réciproquement, si $x \notin \overline{M}$, on peut séparer strictement x et $\overline{M}$ par une forme linéaire continue, par Hahn-Banach. Cette forme linéaire g sera nulle sur $\overline{M}$, qui est un sous-espace vectoriel, et non nulle en x. Donc $g \in M^\perp$ et $x \notin (M^\perp)^\perp$.

Reste le cas de N. Si $x \in N^\perp$, alors $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $f \in N$. Comme l'évaluation est continue, $\langle \bar{f}, x\rangle = 0$ pour tout $\bar{f} \in \overline{N}$. D'où $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$.

2. Supposons que T est fermé. Soit $x \in \operatorname{Im}(T^*)^\perp$. Alors $\langle e, x\rangle = 0$ pour tout $e \in \operatorname{Im} T^*$. Par densité de $D(T)$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $D(T)$ tendant vers x dans E. On voit alors que $\langle f, Tx_n\rangle = \langle T^* f, x_n\rangle \to 0$, c'est-à-dire $Tx_n \rightharpoonup 0$. Supposons par l'absurde que $(x, 0) \notin \operatorname{Gr} T$. Alors grâce au théorème de Hahn-Banach, et puisque $\operatorname{Gr} T$ est par hypothèse un convexe fermé, il existe φ une forme linéaire continue sur $E \times F$ telle que $\varphi(x, 0) > 0$ et $\varphi(x', Tx') = 0$ quel que soit $x' \in D(T)$. On a en particulier $0 = \varphi(x_n, Tx_n) = \varphi(x_n, 0) + \varphi(0, Tx_n)$. Or $f : y \mapsto \varphi(0, y)$ définit une forme linéaire continue sur F, donc par convergence faible, $0 = \varphi(x_n, 0) + \varphi(0, Tx_n) \to \varphi(x, 0)$. On obtient une contradiction.

⋆

Solution 2. *Échauffement : adjoint et domaine*

1. $D(T)$ est dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$, car il contient les suites presque nulles. Montrons que T est fermé : si $u^N \to u$ et $Tu^N \to v$ dans $\ell^1(\mathbb{N})$ quand $N \to +\infty$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n^N - u_n| \leq \|u^N - u\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \to 0,$$
$$|nu_n^N - v_n| \leq \|Tu^N - v\|_{\ell^1(\mathbb{N})} \to 0.$$

Cela prouve que $v_n = nu_n$. Comme c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $v \in \ell^1(\mathbb{N})$, on en déduit que $u \in D(T)$, et que $v = Tu$. Donc T est fermé.

2. Soit $a \in \ell^1(\mathbb{N})^*$. On sait que a s'identifie avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, et que

$$\forall u \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad \langle a, u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n.$$

Supposons que $a \in D(T^*)$. Alors l'application continue

$$u \in D(T) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot n u_n$$

se prolonge en une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbb{N})$ par densité de $D(T)$. Le théorème de dualité $\ell^1 - \ell^\infty$ indique donc que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Après réciproque évidente, il est établi que

$$D(T^*) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \,|\, (na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})\},$$

et que $T^* : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(T^*) \mapsto (na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

En particulier, on voit que toute suite de $D(T^*)$ tend vers 0, et que $D(T^*)$ contient les suites presque nulles. On peut donc prouver que

$$\overline{D(T^*)} = c_0(\mathbb{N}),$$

l'ensemble des suites de limite nulle. Donc T^* n'est pas à domaine dense dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

⋆

Solution 3. *Opérateurs compacts et suites*

Si T est compact, et si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge faiblement vers e, alors la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un compact de F. Soit f une valeur d'adhérence (forte) de cette suite, et $\ell \in F^*$. Alors $x \in E \mapsto \langle \ell, Tx\rangle$ est continue donc $\ell \in D(T^)$ et $\langle \ell, Te_n\rangle = \langle T^*(\ell), e_n\rangle$, et en passant à la limite des deux côtés de l'égalité, on trouve $\langle \ell, f\rangle = \langle T^*(\ell), e\rangle = \langle \ell, Te\rangle$. Donc par Hahn-Banach géométrique, $f = Te$. La suite $(Te_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant pour seule valeur d'adhérence Te, elle converge vers Te.

Réciproquement, si T transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente, montrons que $T(B_E)$ est relativement compact, où B_E est la boule unité de E. Soit donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $T(B_E)$. Écrivons $f_n = T(e_n)$, avec $e_n \in B_E$. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc comme E est réflexif, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence faible, notée e^∞ (c'est une conséquence du théorème de Banach-Alaoglu séquentiel, voir le TD5 ou le cours). Par hypothèse, $f^\infty := Te^\infty$ est une valeur d'adhérence forte de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve que $T(B_E)$ est (séquentiellement) fortement relativement compact.

⋆

Solution 4. *Opérateur de multiplication*

Étudions la continuité de M_a. Si $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a clairement

$$\|M_a(u)\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |u_n|^2 \leq \|a\|^2_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \|u\|^2_{\ell^2(\mathbb{N})}.$$

Donc M_a est continu, et $\|M_a\| \leq \|a\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$. Réciproquement, s'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\|M_a(u)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq C\|u\|_{\ell^2(\mathbb{N})}$, alors $|a_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, si $a_n \neq 0$, on applique l'inégalité précédente avec la suite dont seul le n-ième terme est non nul, et vaut $|a_n|/a_n$.

Étudions la compacité de M_a. Si $a_n \to 0$, on peut considérer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $a^N = (a^N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a^N_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que $\|a^N - a\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \to 0$ quand $N \to +\infty$. Donc $\|M_{a^N} - M_a\| \to 0$. Or M_{a^N} est de rang fini. Donc M_a est compact, en tant que limite en norme opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Inversement, si M_a est compact, considérons la suite δ^n, les suites valant 1 au rang n, et 0 ailleurs. C'est une suite faiblement convergente dans $\ell^2(\mathbb{N})$, vers 0, donc la suite $M_a(\delta^n)$ est fortement convergente dans $\ell^2(\mathbb{N})$ vers 0 (voir l'exercice 3). Or $\|M_a(\delta^n)\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = |a_n|$, donc $a_n \to 0$.

$\star$

Solution 5. *Idéaux de $\mathcal{L}(H)$*

Soit $u \in \mathcal{I}$ non nul. Il existe donc $x_0, y_0 \in H$, tous deux non nuls, tels que $u(x_0) = y_0$. Si $x \in H$ est de norme 1, notons

$$v_1 : h \mapsto (h|x)x_0,$$
$$v_2 : h \mapsto \left(h \middle| \frac{y_0}{\|y_0\|^2}\right) x.$$

Alors $v_2 \circ u \circ v_1 =: p_x$ vérifie $p_x \in \mathcal{I}$ (puisque $\mathcal{I}$ est bilatère), et p_x est la projection sur $\operatorname{Vect} x$. Soit maintenant $v \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini, et soit $(x_1, \ldots, x_N)$ une base orthonormale de son image. Alors $v = (p_{x_1} + \ldots + p_{x_N}) \circ v \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I}$ contient tous les opérateurs de rang fini, et comme $\mathcal{I}$ est fermé en norme, et que dans les Hilbert, l'ensemble des opérateurs compacts est *exactement* l'adhérence (pour la norme subordonnée) de l'ensemble des opérateurs de rang fini, $\mathcal{I}$ contient donc $\mathcal{K}(H)$, l'ensemble des opérateurs compacts.

$\star$

Solution 6. *Fonctions à support dans un même compact*

1. La fonction u définit une distribution à support compact, et donc, par un théorème du cours, sa transformée de Fourier est donnée par la formule

$$\hat{u}(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi} \rangle = \int_{x \in K} u(x) e^{ix\xi} dx, \tag{$\star$}$$

pour $\xi \in \mathbb{R}$. Par Cauchy-Schwarz, on a $|\hat{u}(\xi)| \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot |K|^{1/2}$ pour ξ réel, donc $\hat{u}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part, la formule ($\star$) reste bien définie pour $\xi \in \mathbb{C}$ (puisqu'on intègre sur K compact), et par le théorème de convergence dominée, définit une fonction holomorphe en ξ.

2. $u_n \rightharpoonup 0$ donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{u_n}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} u_n(x) \underbrace{\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}}_{\in L^2(\mathbb{R})} dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Soit $\tilde{K}$ un compact de $\mathbb{C}$, et Ω un ouvert borné qui contient $\tilde{K}$. Alors, $\forall \xi \in \Omega$, $|\widehat{u_n}(\xi)| \leq \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2(\Omega)}$. Observons d'abord que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$ est bornée uniformément en n, d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Ensuite, une majoration brutale garantit que

$$\|\mathbb{1}_K(x) e^{-ix\xi}\|_{L^2(\Omega)} \leq |K|^{1/2} \exp\left(|\mathrm{Im}(\xi)| \cdot \max_{x \in K} |x|\right) \leq C_\Omega,$$

puisque Ω est borné. Les hypothèses du théorème de Montel sont donc satisfaites, donc la suite $(\widehat{u_n}|_{\tilde{K}})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(\tilde{K})$. Or, sa seule valeur d'adhérence possible est 0, d'après la question 2. Donc $\widehat{u_n}$ converge uniformément vers 0 sur $\tilde{K}$.

4. Comme L^2_K est *réflexif*, il suffit de montrer (voir l'exercice 3) que $\mathcal{F}$ transforme toute suite faiblement convergente dans L^2_K en suite fortement convergente dans L^∞_{loc}. Si $u_n \rightharpoonup u$ dans L^2_K, alors $u_n - u \rightharpoonup 0$, donc $\mathcal{F}(u_n - u) = \mathcal{F}(u_n) - \mathcal{F}(u)$ tend uniformément vers 0 sur les compacts de $\mathbb{R}$.

⋆

Solution 7. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | T e_n)$, donc la formule de Parseval donne $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p|Te_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p|Te_n)|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2,$$

car (f_p) est une base hilbertienne de H (tous les termes étant positifs, l'interversion des sommations est licite). Étant donnée une autre base hilbertienne $(\tilde{e}_n)$ de H, on a également $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraîne que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 < \infty$, et l'égalité demandée. Autrement dit, le calcul de $\|T\|_{HS}$ ne dépend pas de la base considérée.

2. Soit $x \in H$ de norme 1. La formule de Parseval appliquée à Tx donne

$$\|Tx\|^2 = \sum_n |(Tx|e_n)|^2 = \sum_n |(x|T^* e_n)|^2 \leq \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \|T^*\|^2_{HS}.$$

Or, d'après le calcul précédent, $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$, ce qui prouve que T est continu, de norme $\leq \|T\|_{HS}$.

3. Soit $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de H telle que $u_n \rightharpoonup 0 \in H$ faiblement. On note $u_n = \sum_m a^n_m e_m$. La convergence faible implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, $a^n_m \to 0$ quand $n \to \infty$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|^2 = \sum_{m\geq 0} |a^n_m|^2 \leq C^2.$$

T étant continue, $Tu_n = \sum_m a^n_m T e_m$. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

— il existe M tel que $\sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \leq \varepsilon^2/C^2$ (par la propriété de Hilbert-Schmidt, $\|T\|^2_{HS} = \sum_{n\geq 0} \|Te_n\|^2 < +\infty$) ;

— il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{m<M} |a^n_m|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\|T\|^2_{HS}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tu_n\| &= \left\| \sum_m a^n_m T e_m \right\| \\
&\leq \left| \sum_{m<M} |a^n_m| \|Te_m\| \right| + \left| \sum_{m\geq M} |a^n_m| \|Te_m\| \right| \\
&\leq \left(\sum_{m<M} |a^n_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m<M} \|Te_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{m\geq M} |a^n_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}} \|T\|_{HS} + C \frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $Tu_n \to 0$ dans H fortement. Cela prouve que T est compact.

Réciproquement il existe des opérateurs T compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple, la multiplication M_a de l'exercice 4, avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons encore δ^n la suite dont seul le n-ième terme n'est pas nul, et vaut 1. Alors $(\delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est base hilbertienne de H. Calculons

$$\sum_{n\geq 0} \|\Gamma_c(\delta^n)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} |c_{k+n}|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} (1+j)|c_j|^2,$$

en sommant le long des diagonales $k+n=j$ cette série à termes positifs. On voit donc que $\|\Gamma_c\|_{HS} < +\infty$ si et seulement si $\sum_{j\in\mathbb{N}}(1+j)|c_j|^2 < +\infty$.

$\star$

Solution 8. *Opérateurs à noyaux*

1. Soit (e_n) une base hilbertienne de H. Notons $e_n \otimes e_m : (x,y) \mapsto e_n(x)e_m(y)$.

$$\|T_K\|_{HS}^2 = \sum_n \|T_K e_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} |(T_K e_n|e_m)|^2$$
$$= \sum_{n,m} \left| \iint_\Omega K(x,y)e_n(x)e_m(y)dxdy \right|^2 = \sum_{n,m} |(K|e_n\otimes e_m)|^2.$$

La seule chose est donc de vérifier que $(e_n \otimes e_m)$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega\times\Omega)$. C'est bien une famille orthonormée. Soit V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Alors, si $h \in V^\perp$, on a $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\iint_\Omega h(x,y)e_n(x)e_m(y)dxdy = 0,$$

et donc pour tout n, la fonction $y \mapsto h(x,y)e_n(x)$, qui pour presque tout $x \in \Omega$ est dans $L^2(\Omega)$, est nulle. Donc à y fixé, $\int_\Omega h(x,y)e_n(x)dx = 0$, et donc $h(x,y) \equiv 0$. Cela prouve que $\overline{V} = (V^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = L^2(\Omega\times\Omega)$.

2. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$. Notons $Te_n = \sum_m a_m^n e_m$ et

$$K(x,y) = \sum_{m,n} a_m^n e_m(x)e_n(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ car T est Hilbert-Schmidt (on a précisément $\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m}|a_m^n|^2 = \|T\|_{HS}^2 < +\infty$). Par construction, T_K vérifie que pour tout $p, q \geq 0$, $(T_K e_p|e_q) = a_q^p$ et donc $T_K e_p = Te_p$. Ainsi, T_K est continu sur $L^2(\Omega)$, et coincide avec T sur $\mathrm{Vect}(e_n)$, qui est dense. Donc T_K est égal à T.

Examinons l'unicité : supposons que $T = T_{K_1} = T_{K_2}$. Alors $0 = \|T_{K_1-K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$, et donc $K_1 = K_2$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que $\overline{\omega}$ est compact, contenu dans $\Omega\times\Omega$, et tel que $\int_{(\Omega\times\Omega)\setminus\omega} |K|^2 \leq \varepsilon$. Soit F une fonction continue sur $\Omega\times\Omega$, à support dans $\overline{\omega}$, telle que $\|K - F\|_{L^2(\overline{\omega})} \leq \varepsilon$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe un polynôme P en les variables x, y tel que

$$\|F - P\|_{L^\infty(\overline{\omega})} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\omega|}}.$$

Notons $\tilde{P} := \mathbb{1}_{\overline{\omega}} P$. Alors $T_{\tilde{P}}$ est de rang fini (car si d est le degré en x de P, alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $T_{\tilde{P}}(f)$ est une combinaison linéaire de troncatures des monomes $1, x, \dots, x^d$). Enfin, $\|T_K - T_{\tilde{P}}\| \leq \|T_K - T_{\tilde{P}}\|_{HS} = \|K - \tilde{P}\|_{L^2} \leq 3\varepsilon$. Donc T_K est bien approchable par une suite d'opérateurs de rang fini.

$\star$