Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 14

Espaces de Sobolev

Séance du 22 mai 2017

Solution 1. *Échauffement : petites questions sur $H^s(\mathbb{R}^d)$*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ si et seulement si $s < -d/2$.
Remarque : Pour montrer l'injection de H^s dans $\mathcal{C}^0$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat, on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$, puis conclure par la formule d'inversion (dans L^2), et le théorème de convergence dominée.

2. Il suffit de remarquer que $(1 + |\xi|^2)^{s_1} \geq (1 + |\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, et l'on obtient la continuité de l'injection $H^{s_1} \hookrightarrow H^{s_2}$.

3. Soit m l'ordre de u dans $\mathcal{E}'$. La transformée de Fourier de u est bien définie car $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ (on a même vu qu'il s'agit alors d'une fonction entière). On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2$. On prend $\varphi \in \mathcal{S}$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}(1 + |\xi|^2)^{s/2}, \varphi \rangle &= \langle \hat{u}, (1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi \rangle \\
&= \left\langle u, \mathcal{F}\left((1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right\rangle \\
&\leq C \sup_{\substack{|\alpha|\leq m \\ x\in K}} \left|\partial^\alpha \mathcal{F}\left((1 + |\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{m/2}(1 + |\xi|^2)^{s/2}|\varphi(\xi)| d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{m+s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement : les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact, et pour la dernière inégalité, c'est bien sûr Cauchy-Schwarz). Si $s < -m - \frac{d}{2}$, la dernière intégrale est finie. Grâce à la densité de $\mathcal{S}$ dans L^2, on voit donc que $\hat{u} \cdot (1 + |\xi|^2)^{s/2}$ définit une forme linéaire sur L^2, et on conclut par dualité.

4. Comme l'application $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne, on a

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| \leq |x \cdot \xi - y \cdot \xi| \leq |x - y||\xi|,$$

par Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^d$. Et donc en interpolant, on a, pour tout $\alpha \in [0, 1]$,

$$|e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}| = |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^\alpha |e^{-ix\cdot\xi} - e^{-iy\cdot\xi}|^{1-\alpha} \leq C|x - y|^\alpha |\xi|^\alpha.$$

Or, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$u(x) - u(y) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) \left(e^{ix\cdot\xi} - e^{iy\cdot\xi}\right) d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\le \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^\alpha |\hat{u}(\xi)| d\xi \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac12} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac12} \\ &\le C(\varepsilon) \|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in]0, s-\frac{d}{2}[$, on a (avec $\varepsilon = 2s - d - 2\alpha > 0$),

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Enfin (et c'est encore la même preuve que mentionnée à la question 1),

$$\begin{aligned}|u(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi\right| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)| d\xi \le \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)| \frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} d\xi \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2} \le C(s)\|u\|_{H^s},\end{aligned}$$

car $s > d/2$, et donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^d, d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité de $\mathcal{S}$, on conclut que $H^s \subset C^\alpha$ avec injection continue.

⋆

Solution 2. *Cas limite d'injection de Sobolev*

1. On considère la fonction radiale définie par $f(r) = \chi(r)\ln^{1/3} r$, où χ est une fonction $\mathcal{C}_c^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qui vaut 1 au voisinage de 0. On calcule, sur $\{\chi \equiv 1\}$, $\partial_r f = \frac{1}{3r\ln^{2/3} r}$, et f est continue en sur le disque unité, donc en calculant l'intégrale en coordonnées polaires,

$$\|f\|_{H^1}^2 = 2\pi \int_0^C \left(\ln^{2/3} r + \frac{1}{9r^2 \ln^{4/3} r}\right) r dr < \infty.$$

Ainsi $f \in H^1$, mais bien sûr, $f \notin L^\infty$.

2. On a $|u(x_1,x_2)| \le \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t,x_2)| dt$, et symétriquement pour x_2, donc :

$$|u(x_1,x_2)|^2 \le \int_{x_1} |\partial_{x_1} u(t,x_2)| dt \cdot \int_{x_2} |\partial_{x_2} u(x_1,t)| dt.$$

En intégrant en x_1 et en x_2, vu que les variables sont séparées :

$$\|u\|_{L^2}^2 \le \iint |\partial_{x_2} u(x_1,t)| dt dx_1 \cdot \iint |\partial_{x_1} u(t,x_2)| dt dx_2 \le \|\partial_{x_1} u\|_{L^1} \|\partial_{x_2} u\|_{L^1}.$$

3. On applique ce qui précède à u^θ, dont les dérivées sont $\theta u^{\theta-1}\partial_{x_i} u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{2\theta}}^{2\theta} = \|u^\theta\|_{L^2}^2 &\le \|\theta u^{\theta-1}\partial_{x_1} u\|_{L^1} \|\theta u^{\theta-1}\partial_{x_2}\theta\|_{L^1} \\ &\le \theta^2 \|u^{\theta-1}\|_{L^2} \|\partial_{x_1} u\|_{L^2} \|u^{\theta-1}\|_{L^2} \|\partial_{x_2} u\|_{L^2} \le \theta^2 \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}^{2(\theta-1)} \|\nabla u\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'estimée voulue.

4. La concavité du logarithme s'écrit, pour $x, y > 0$, $\lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda \ln x + (1-\lambda) \ln y \leq \ln \left(\lambda x + (1-\lambda) y\right),$$

soit encore : $x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda) y$. On choisit donc $\lambda = (\theta - 1)/\theta$, $x = \|u\|_{L^{2(\theta-1)}}$ et $y = \|\nabla u\|_{L^2}$, pour obtenir

$$\|u\|_{L^{2\theta}} \leq (\theta - 1) \|u\|_{L^{2(\theta-1)}} + \|\nabla u\|_{L^2}.$$

On peut donc même choisir $C(\theta) = \theta$.

On sait que $H^1 \hookrightarrow L^2$, donc avec $\theta = 2$, on obtient que $H^1 \hookrightarrow L^4$. Puis par récurrence immédiate, on obtient $H^1 \hookrightarrow L^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}$. Enfin, pour tout $q \in [2, \infty[$, on interpole entre L^2 et L^{2k} avec $k \geq q/2$, et ainsi $H^1 \hookrightarrow L^q$.

⋆

Solution 3. *Une autre écriture de H^s*

1. Il faut remarquer qu'en faisant le changement de variable $x = x$, $y = x + h$, on obtient :

$$I_s(u) = \iint \frac{|u(x) - \tau_h u(x)|^2}{|h|^{n+2s}} dx dh.$$

Par la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - \tau_h u(x)|^2 dx = \|u - \tau_h u\|_{L^2}^2 = \|\hat{u} - \widehat{\tau_h u}\|_{L^2}^2 = \|(1 - e^{ih\cdot\xi}) \hat{u}(\xi)\|_{L^2}^2.$$

Donc finalement,

$$I_s(u) = \iint \frac{dh}{|h|^{n+2s}} |1 - e^{ih\cdot\xi}|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

ce qui est la formulation demandée.

2. On fait dans f le changement de variable $\eta = |\xi| h$, ce qui donne $dh = |\xi|^{-n} d\eta$, et $h \cdot \xi = \eta \cdot \omega$ (avec $\omega = \xi / |\xi|$). Et donc

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta\cdot\omega} - 1|^2 \frac{|\xi|^{-n} d\eta}{|\xi|^{-n-2s} |\eta|^{n+2s}}.$$

En notant

$$g(\omega) := \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta\cdot\omega} - 1|^2 \frac{d\eta}{|\eta|^{n+2s}},$$

g est finie car $s \in]0, 1[$ et $|e^{-i\eta\cdot\omega} - 1| \leq \min(2, |\eta|)$. De plus, on voit que $g(\mathcal{R}\omega) = g(\omega)$, pour toute $\mathcal{R}$ rotation dans $\mathbb{R}^n$). Ceci signifie que g est une constante $K(n, s)$ finie et strictement positive. Pour conclure,

$$I_s(u) = K(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

d'où l'équivalence des normes.

⋆

Solution 4. *L'équation des ondes*

1. On considère la transformation de Fourier en $x \in \mathbb{R}^N$ de l'équation, et on se ramène donc à chercher une solution $t \mapsto \hat{u}(t, \xi)$ de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \\ \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_0, \ \partial_t \hat{u}(0, \cdot) = \hat{u}_1 \text{ dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(t|\xi|)\hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\hat{u}_1(\xi),$$

On en déduit l'unique solution en inversant la transformée de Fourier. En dimension 1, on peut faire un calcul plus explicite et on retrouve la formule dite de d'Alembert.

2. Comme $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \{\xi, 1 \leq |\xi| \leq 2\}$, on peut écrire $\widehat{f} = \chi \widehat{f}$ avec χ radiale telle que $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et $|\xi| \geq 3$, et $\chi(\xi) = 1$ pour $1 \leq |\xi| \leq 2$. On a donc

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\widehat{f}\chi) = f * \mathcal{F}^{-1}(e^{it|\xi|}\chi(\xi)),$$

d'où la formule

$$K(t, x) = c_N \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\xi) e^{it|\xi| + ix\cdot\xi} d\xi,$$

3. On écrit en coordonnées polaires

$$K(t, x) = c_N \int_{r=0}^{+\infty} r^{N-1}\chi(r) \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{ir(t + x\cdot\omega)} d\omega dr.$$

L'idée est simple : on veut faire des intégrations par partie en r, en intégrant l'exponentielle pour gagner des puissances de t. En effet,

$$e^{ir(t+x\cdot\omega)} = \frac{i}{t + x\cdot\omega}\partial_r e^{ir(t+x\cdot\omega)}$$

Pour $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $|x| \geq 2t$, on a

$$\left|\frac{i}{t + x\cdot\omega}\right| \leq \frac{2}{t},$$

donc on peut itérer le processus, et gagner autant de puissances de t que l'on veut.

La partie délicate concerne donc la tranche $\frac{t}{2} \leq |x| \leq 2t$. On écrit

$$\begin{aligned} K(t, x) &= c_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{-itr} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{irx\cdot\omega} d\omega dr \\ &= c_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{-itr} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{N-1}} e^{ir|x|\cos(\omega_1)} d\omega dr \\ &= \tilde{c}_N \int_{r=\frac{1}{2}}^{3} \chi(r) r^{N-1} e^{-itr} \int_{\omega_1 \in \mathbb{S}} e^{ir|x|\cos(\omega_1)} |\cos(\omega_1)|^{N-2} d\omega_1 dr \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de l'intégrale en ω par rotation. Cette fois, on intègre par partie en ω_1, et on voit que l'on peut faire $\lceil \frac{N-2}{2} \rceil$ intégrations par parties grâce au facteur $\cos(\omega_1)$, et l'on ne crée pas de termes de bord. À chaque intégration par partie, un facteur $\frac{1}{|x|}$ apparaît, et comme $|x| \simeq t$ sur cette tranche, on obtient une première estimée de décroissance. Pour « gagner » encore un peu, il faut remarquer que, si $y > 0$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iy\cos\theta} d\theta \sim_{y \to +\infty} \frac{C}{\sqrt{y}}.$$

Cela provient d'un développement en série de Taylor de $\theta \mapsto \cos\theta$ au voisinage de 0 (lemme de phase stationnaire). On obtient donc la décroissance voulue.

4. On a vu à la question 1 que

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(K(t,x) + K(-t,x)) * u_0 + \frac{1}{2i}(K(t,x) - K(-t,x)) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{u_1}(\xi)}{|\xi|}\right),$$

donc

$$|u(t,x)| \leq (\|K(t,\cdot)\|_\infty + \|K(-t,\cdot)\|_\infty)(C_{u_0} + C_{u_1}) \lesssim \frac{1}{|t|^{\frac{N-1}{2}}}.$$

⋆