Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 14

Propriétés spectrales des opérateurs

Séance du 17 mai 2019

Solution 1. *Échauffement*

1. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\ell \in F^*$, alors $x \in E \mapsto \langle \ell, Tx\rangle$ est continue, comme composée de deux applications continues. Donc $\ell \in D(T^*)$ et $T^*\ell \in E^*$.

Si $\|x\|_E \leq 1$, alors $|\langle T^*\ell, x\rangle| = |\langle \ell, Tx\rangle| \leq \|\ell\|_{F^*}\|T\|$. D'où $\|T^*\ell\|_{E^*} \leq \|\ell\|_{F^*}\|T\|$, et donc $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $\ell_x \in F^*$ telle que $\|\ell_x\|_{F^*} = 1$ et $\langle \ell_x, Tx\rangle = \|Tx\|_F$. Or $\langle \ell_x, Tx\rangle = \langle T^*\ell_x, x\rangle \leq \|T^*\|$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, on a donc $\|Tx\|_F \leq \|T^*\|$. Ainsi $\|T\| \leq \|T^*\|$.

2. Soit A un opérateur continu sur un H. Si x est de norme 1,

$$\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle A^*A(x), x\rangle,$$

donc $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$, et l'autre inégalité est triviale.

$\star$

Solution 2. *Opérateur de Volterra*

1. Observons que si $f \in E$, et $x, y \in [0,1]$,

$$|V(f)(x)| \leq \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2},$$
$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| \leq \|f\|_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}},$$

donc V est à valeurs dans les fonctions continues bornées (en particulier, $V : E \to E$ est continue, puisque l'injection $L^\infty([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ l'est). D'autre part, les estimées ci-dessus permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli à $V(B_E)$, qui est donc relativement compacte dans $C([0,1])$, et par suite dans E.

Comme V est compact, son spectre contient 0. Par ailleurs, on sait que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(V) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre (et de multiplicité finie). Or si $V(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$, alors f est continue (dans l'image de V), donc dérivable, et $f' = f/\lambda$. Comme $f(0) = 0$, cela impose $f \equiv 0$, et donc λ n'est pas valeur propre. Ainsi $\mathrm{Sp}(V) = \{0\}$.

2. Introduisons la fonction K définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On écrit ainsi V comme un opérateur à noyau : $V(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$. De la sorte, si $f, g \in E$, grâce au théorème de Fubini,

$$\langle V(f), g\rangle = \iint_{[0,1]^2} K(x,y)f(y)g(x)dxdy = \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 K(x,y)g(x)dx\right)dy = \langle f, V^*(g)\rangle,$$

et donc $V^*(g)(y) = \int_0^1 K(x,y)g(x)dx = \int_y^1 g(x)dx$.

3. En tant que composée d'un opérateur compact et d'un opérateur continu, VV^* est un opérateur auto-adjoint, compact, positif et non nul. La théorie spectrale pour ces opérateurs nous dit donc que $\|VV^*\|$ est égale à sa plus grande valeur propre. Soit donc $f \in E$ et $\lambda > 0$ tels que $VV^*(f) = \lambda f$. Alors $-\lambda f'' = f$. Posons $\mu := 1/\sqrt{\lambda}$. On sait que f est de la forme $f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$. Or $f(0) = A = 0$, et $f'(0) = B\mu = \lambda^{-1}\int_0^1 f = \lambda^{-1}\frac{B}{\mu}(1-\cos(\mu))$. Cela prouve que l'on doit avoir $\cos(\mu) = 0$, et donc $\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}$. Donc la plus grande valeur propre correspond au plus petit μ, c'est-à-dire à $\mu = \frac{\pi}{2}$, ou encore $\lambda = \frac{4}{\pi^2}$.

On applique la question 2 de l'exercice 1 à $A = V^*$, et on trouve $\|V^*\| = \|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

Solution 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas valeur propre de A, cela signifie que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$. Soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Supposons que λ ne soit pas dans le spectre de $A + K$: il existe alors un opérateur inversible S tel que $(A + K - \lambda I)S = I$. Cela signifie en particulier que $(A - \lambda I)S = I - KS$. Comme $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, et que S est injective, on en déduit que $I - KS$ est aussi injective. Donc elle est surjective, grâce à l'alternative de Fredholm (puisque KS est compact). Donc $A - \lambda I$ est également surjective (elle est donc bijective), ce qui signifie que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

⋆

Solution 4. *Une caractérisation de la surjectivité*

1. Soit $y \in B_F(0,r)$. En suivant l'indication, on va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E par $x_0 = 0$ puis par récurrence on construit x_n tel que $x_n \in B_E(0, 2\cdot 2^{-n})$ et $\|y - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\|_F \leq r \cdot 2^{-n}$.

Au rang 0, le choix de x_0 convient. Supposons à présent x_n construit. Comme $\|y - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\|_F \leq r \cdot 2^{-n}$, en multipliant l'hypothèse par 2^{-n}, on voit qu'il existe $x_{n+1} \in B_E(0, 2^{-n}) \cap D(T)$ tel que $\|y - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - Tx_{n+1}\|_F \leq r \cdot 2^{-(n+1)}$.

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\|y - T\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\|_F \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. Notons $\sigma_n := \sum_{k=1}^n x_k \in D(T)$. Comme $\sum \|x_k\|_E < +\infty$ et que E est un Banach, on voit que σ_n converge vers une limite $\sigma \in E$. De plus, $\|\sigma\|_E \leq \sum_{n\geq 1} 2\cdot 2^{-n} = 2$. D'autre part, $T\sigma_n \to y$. En d'autres termes,

$$(\sigma_n, T\sigma_n) \longrightarrow (\sigma, y).$$

Comme T est fermé, on trouve donc que $\sigma \in D(T)$ et que $y = T\sigma$. Cela prouve que $y \in T(B_E(0,2) \cap D(T))$.

2. Notons $C = \overline{T(B_E(0,1) \cap D(T))}$. C'est un convexe fermé de F. Prenons également $y_0 \in F \setminus C$. La version géométrique du théorème de Hahn-Banach permet donc d'affirmer qu'il existe $\ell \in F^*$ tel que

$$\langle \ell, y\rangle \leq 1 < \langle \ell, y_0\rangle, \quad \forall y \in C,$$

quitte à renormaliser ℓ.

En particulier, $\forall x \in B_E(0,1) \cap D(T)$, $\langle \ell, Tx\rangle \leq 1$. Cela implique que l'application linéaire $x \in D(T) \mapsto \langle \ell, Tx\rangle$ est continue, puisqu'elle est bornée sur un borné. Ainsi $\ell \in D(T^*)$, et pour tout $x \in B_E(0,1) \cap D(T)$,

$$\langle T^*\ell, x\rangle \leq 1.$$

Par densité de $D(T)$, cela veut dire que $\|T^*\ell\|_{E^*} \leq 1$. Enfin, grâce à l'hypothèse $(\star)$, $\|\ell\|_{F^*} \leq \frac{1}{r}$.

On en déduit que $1 < \langle \ell, y_0\rangle \leq \|\ell\|_{F^*}\|y_0\|_F$, ce qui veut dire que $\|y_0\|_F > r$. Ainsi $B_F(0,r) \subset C$. Grâce à la question précédente, on trouve donc $B_F(0,r) \subset T(B_E(0,2) \cap D(T))$, et donc par homogénéité, T est surjective.

3. Supposons maintenant T surjectif, et posons

$$C^* = \{\ell \in D(T^*) \mid \|T^*\ell\|_{E^*} \leq 1\}$$

Pour obtenir l'inégalité, il suffit de montrer que C^* est borné : en effet, si C^* est borné par K, alors pour tout $\ell \in D(T^*)$, $\|T^* \frac{\ell}{\|T^*\ell\|_{E^*}}\|_{E^*} \leq 1$ donc $\|\frac{\ell}{\|T^*\ell\|_{E^*}}\|_{F^*} \leq K$, ce qui est l'inégalité voulue.

Pour prouver que C^* est borné, il suffit de montrer qu'il est ponctuellement borné, grâce au théorème de Banach-Steinhaus. On veut donc montrer que si $y \in F$, alors $\{\langle \ell, y\rangle,\ \ell \in C^*\}$ est borné. Comme T est surjectif, on peut écrire $y = Tx$ avec $x \in D(T)$. Donc pour tout $\ell \in C^*$ $(\subset D(T^*))$,

$$|\langle \ell, y\rangle| = |\langle \ell, Tx\rangle| = |\langle T^*\ell, x\rangle| \leq \|x\|_E,$$

ce qui termine la preuve.

⋆

Solution 5. *Question de cours : images fermées*

1. Puisque $\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$ (d'après le cours ou l'exercice 1 du TD précédent), il est clair que $\operatorname{Im} T$ est fermé si et seulement si $\operatorname{Im} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.

De plus, si $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^*$, comme l'évaluation est continue, alors $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ est fermé, et donc c'est aussi le cas pour $\operatorname{Im} T^*$.

2. On suppose que $\operatorname{Im} T$ est fermé. Pour montrer (iv), et vu l'exercice 1 du TD précédent : $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$, il suffit de montrer que $(\operatorname{Ker} T)^\perp \subset \operatorname{Im} T^*$. Soit donc $\varphi \in (\operatorname{Ker} T)^\perp$. On veut réaliser φ comme l'image d'un élément de F^* par T^*. On va donc définir déjà une forme linéaire ℓ sur $\operatorname{Im} T$ par

$$\langle \ell, Tx\rangle := \langle \varphi, x\rangle, \quad \forall x \in D(T).$$

Vérifions que ℓ est bien définie : si $Tx = Tx'$ pour $x, x' \in D(T)$, alors $x - x' \in \operatorname{Ker} T$, donc $\langle \varphi, x - x'\rangle = 0$. Cela prouve que ℓ est définie sans ambiguïté.

On montre à présent que ℓ est continue sur $\operatorname{Im} T$. L'application $\Gamma : \operatorname{Gr} T \to \operatorname{Im} T$, $(x, Tx) \mapsto Tx$ est linéaire, surjective, continue, entre deux espaces de Banach (puisque T est fermé et que $\operatorname{Im} T$ est fermé), donc le théorème de l'application ouverte s'applique. Il existe donc $\kappa > 0$ tel que l'image de $B_{E\times F}(0, 1) \cap \operatorname{Gr} T$ par Γ contienne $B_F(0, \kappa) \cap \operatorname{Im} T$: autrement dit, si $y \in \operatorname{Im} T$ est tel que $\|y\|_F \leq \kappa$, alors il existe $x \in D(T)$ tel que $\|x\|_E \leq 1$ et $y = Tx$. Par homogénéité, on en conclut que pour tout $\tilde{y} \in \operatorname{Im} T$, il existe $\tilde{x} \in D(T)$ tel que $\tilde{y} = T\tilde{x}$ et

$$\|\tilde{x}\|_E \leq \frac{1}{\kappa}\|\tilde{y}\|_F.$$

En particulier, on trouve donc que $|\langle \ell, \tilde{y}\rangle| = |\langle \varphi, \tilde{x}\rangle| \leq \|\varphi\|_{E^*}\|\tilde{x}\|_E \leq \kappa^{-1}\|\varphi\|_{E^*}\|\tilde{y}\|_F$. Ainsi ℓ est continue sur $\operatorname{Im} T$.

Prolongeons ℓ en une forme linéaire $L \in F^*$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Pour tout $x \in D(T)$, on sait que

$$\langle L, Tx\rangle = \langle \ell, Tx\rangle = \langle \varphi, x\rangle,$$

et donc est continue sur $D(T)$. D'où $L \in D(T^*)$. Enfin, ce calcul montre aussi que $T^*L = \varphi$ puisque ces deux formes linéaires coïncident sur $D(T)$, qui est dense. Cela achève de prouver que $\varphi \in \operatorname{Im} T^*$.

3. On suppose que $\operatorname{Im} T^*$ est fermée (ii). On note $Z = \overline{\operatorname{Im} T}$ et $S : D(T) \to Z$, $x \mapsto Tx$.

(a) S est d'image dense, donc d'après l'exercice 1 du TD 3, on a $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Im} S)^\perp$. La seule forme linéaire continue sur Z à s'annuler sur $\operatorname{Im} S$ est 0, donc $\operatorname{Ker} S^* = \{0\}$.

D'autre part, montrons que $\operatorname{Im} S^* = \operatorname{Im} T^*$, ce qui implique que $\operatorname{Im} S^*$ est fermée dans E^*. Si $\varphi \in \operatorname{Im} S^*$, alors $\varphi = S^*\ell$, avec $\ell \in D(S^*) \subset Z^*$. On peut prolonger ℓ en une forme linéaire continue L définie sur F entier, par Hahn-Banach. Alors pour tout $x \in D(S) = D(T)$,

$$\langle \varphi, x\rangle = \langle S^*\ell, x\rangle = \langle \ell, Tx\rangle = \langle L, Tx\rangle$$

, par conséquent,

$$|\langle L, Tx\rangle| \leq \|S^*\ell\|_{E^*}\|x\|_E,$$

donc $L \in D(T^*)$ et pour tout $x \in D(T)$,

$$\langle \varphi, x\rangle = \langle T^*L, x\rangle,$$

d'où $\varphi \in \operatorname{Im} T^*$. L'autre inclusion est identique, par simple restriction des formes de F^* à Z.

(b) Notons $\Gamma : \operatorname{Gr} S^* \to \operatorname{Im} S^*$, $(\ell, S^*\ell) \mapsto S^*\ell$. Comme $\operatorname{Gr} S^*$ est fermé dans $F^* \times E^*$ (c'est automatique, cf. cours), Γ est une application entre Banach. Elle est linéaire, continue, surjective, et également injective, puisque S^* est injective. C'est donc un homéomorphisme linéaire, grâce au théorème de l'application ouverte. Donc il existe $C > 0$ telle que

$$\|S^*\ell\|_{E^*} + \|\ell\|_{F^*} \leq C\|S^*\ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(S^*).$$

En particulier, cela implique qu'il existe $r > 0$ tel que

$$r\|\ell\|_{F^*} \leq \|S^*\ell\|_{E^*}, \quad \forall \ell \in D(S^*).$$

Grâce à l'exercice 4, on en déduit que S est surjective, *i.e.* $\operatorname{Im} S = Z$. Or $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} T$, et comme Z est fermé, on trouve bien que l'image de T est fermée (i).

⋆

Solution 6. *Calculs de spectre*

1. Remarquons que $\|T\| = 1$. On en déduit déjà que $\operatorname{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$, le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Cherchons déjà si T admet des valeurs propres. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| \leq 1$. L'équation $Tu = \lambda u$ implique que $u_1 = \lambda u_0$, $u_2 = \lambda u_1$, et ainsi de suite. Notons donc $u^\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Si $|\lambda| < 1$, alors $u^\lambda \in \ell^1$, et donc λ est valeur propre de T (le sous-espace propre associé est même de dimension 1). En revanche, si $|\lambda| = 1$, alors $u^\lambda \notin \ell^1$, et donc T n'admet pas λ pour valeur propre. Or on sait que $\operatorname{Sp}(T)$ est fermé. Donc $\operatorname{Sp}(T) = \overline{D}(0,1)$.

On considère maintenant l'opérateur $T^* : (u_0, u_1, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto (0, u_0, u_1, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. On a également $\|T^*\| = 1$, mais T^* n'a pas de valeur propre. En revanche, c'est un fait général dans les Banach que $\operatorname{Sp}(T) = \operatorname{Sp}(T^*)$. (Prouvons-le, pour mémoire : quitte à retrancher ou ajouter $\lambda\,\mathrm{id}$, il suffit de vérifier que T est inversible si et seulement si T^* est inversible. Dans un sens, c'est facile, car si $RT = TR = \mathrm{id}$, alors $T^*R^* = R^*T^* = \mathrm{id}$. Réciproquement, si T^* est surjective, alors comme T est fermé, on a $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T^*)^\perp = \{0\}$; et si T^* est inversible, il existe $c > 0$ tel que $\forall y^* \in X^*$, $\|T^*(y^*)\| \geq c\|y^*\|$, mais on a vu dans l'exercice 4 que cela implique que T est surjective.)

2. Observons que T est isométrique. Donc $\|T\| = 1$, et $\operatorname{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Commençons par chercher les valeurs propres de T. Supposons que λ ne soit pas de module 1, *i.e.* $|\lambda| < 1$. Alors l'égalité $\lambda f(x) = f(x+1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leq \lambda^n \|f\|_{L^\infty}$, et donc, en faisant tendre n vers l'infini à x fixé, on trouve que $f \equiv 0$. Donc λ n'est pas valeur propre de T. En revanche, si $|\lambda| = 1$, écrivons $\lambda = e^{i\theta}$. La fonction $f(x) = e^{i\theta x}$ est alors vecteur propre de T, associé à la valeur propre λ.

Or T est inversible, d'inverse $S : E \to E$, $f \mapsto f(\cdot - 1)$. On a aussi $\|S\| = 1$. D'autre part, $T - \lambda\,\mathrm{id} = -\lambda T(S - \lambda^{-1}\,\mathrm{id})$. Donc $\lambda \in \operatorname{Sp}(T)$ si et seulement si $\lambda^{-1} \in \operatorname{Sp}(S)$. Or $\operatorname{Sp}(S) \subseteq \overline{D}(0,1)$, ce qui achève de prouver que $\mathrm{Sp}(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$, avec égalité puisque c'est aussi l'ensemble de ses valeurs propres.

⋆

Solution 7. *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

1. Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Décomposons le polynôme $P - \mu$ en produit de facteurs irréductibles, soit $P(X) - \mu = \prod_j (X - \alpha_j)$. En évaluant cette égalité en A, on voit que nécessairement, l'un des α_j est dans $\mathrm{Sp}(A)$, sinon le produit de droite est inversible. Notons-le α_{j_0}. On a donc $P(\alpha_{j_0}) - \mu = 0$, c'est-à-dire $\mu \in P(\mathrm{Sp}(A))$.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors écrivons $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda) \cdot \prod_j (X - \kappa_j)$, de sorte que $P(A) - P(\lambda)I = (A - \lambda I) \prod_j (A - \kappa_j I) = \left(\prod_j (A - \kappa_j I)\right)(A - \lambda I)$. Cela prouve que $P(A) - P(\lambda)I$ ne peut pas être inversible (comme $A - \lambda I$), il est soit non injectif soit non surjectif), *i.e.* que $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(A))$. Ainsi $\mathrm{Sp}(P(A)) = P(\mathrm{Sp}(A))$.

2. Si T est auto-adjoint, alors

$$\|T\|^2 = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|Tx\|^2 = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle T^*Tx, x\rangle \le \|T^*T\| = \|T^2\|.$$

Par ailleurs, on a bien sûr $\|T^2\| \le \|T\|^2$, puisque $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, donc lorsque T est auto-adjoint, $\|T^2\| = \|T\|^2$. Dès lors, si on considère la sous-suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on voit que $\|T^{2^n}\|$ est égale à $\|T\|^{2^n}$. Cela implique donc que $r(T) = \liminf_{k\to+\infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}} \ge \|T\|$, et donc $r(T) = \|T\|$.

3. On sait que A est auto-adjoint, donc pour tout polynôme P, on a $(P(A))^* = \bar{P}(A)$. Ainsi (voir la question 2 de l'exercice 1)

$$\|P(A)\|^2_{\mathcal{L}(H)} = \|(P(A))^* P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)},$$

où la dernière égalité provient de ce que $P \mapsto P(A)$ est un morphisme d'algèbres. Or d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\|(P\bar{P})(A)\|_{\mathcal{L}(H)} &= r((P\bar{P})(A)) \\
&= \max_{\mu \in \mathrm{Sp}((P\bar{P})(A))} |\mu| \\
&= \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |(P\bar{P})(\lambda)| \\
&= \||P|^2\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))} = \|P\|^2_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Or $\mathrm{Sp}(A)$ est compact. Donc d'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes sur $\mathrm{Sp}(A)$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathrm{Sp}(A)$, pour la norme uniforme, et $\mathcal{L}(H)$ est complet. L'isométrie $P \mapsto P(A)$ se prolonge ainsi de manière unique en une application

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A)) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ \qquad\qquad f \longmapsto f(A) \end{cases}$$

également isométrique.

⋆