Correction du Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach

Séance du 21 février 2014

Solution 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

1. Considérons un voisinage faible, de la forme $V = \cap_{i \geq N}\{l \in B_{E'}, -\varepsilon \leq (l, x_i) \leq \varepsilon\}$. Par densité, pour $i \leq N$ il existe x_{n_i} tels que $\|x_{n_i} - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $A = \max n_i$. Alors $B_d(0, \frac{\varepsilon}{2A}) \subset V$. En effet si $l \in B_d(0, \frac{\varepsilon}{A})$ alors

$$|(l, x_i)| \leq |(l, x_i - x_{i_n})| + |(l, x_{i_n})| \leq \|l\|\|x_i - x_{i_n}\| + \frac{\varepsilon}{2A}2^{n_i} \leq \varepsilon.$$

(On a utilisé $\|l\| \leq 1$.) Réciproquement, une boule $B_d(0, 2\varepsilon)$ contient un ouvert faible de la forme $V = \cap_{n \geq N}, \{l \in E', -\varepsilon \leq (l, x_n) \leq \varepsilon\}$, avec $2^{-N} \leq \varepsilon$ En effet si $l \in V$ alors

$$d(l, 0) \leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{2^N}|(l, x_n)| + \sum_{n > N} \frac{1}{2^N}|(l, x_n)| \leq \varepsilon + \frac{1}{2^N} \leq 2\varepsilon.$$

On a aussi utilisé $|(l, x_n)| \leq \|l\|\|x_n\| \leq 1$.

2. Réciproquement, supposons $B_{E'}$ métrisable. Soit $U_n = \{f \in B_{E'}, d(f, 0) < \frac{1}{n}\}$. Il existe $V_n = \{f \in B_{E'}, |(f, x)| < \epsilon_n \forall x \in \Phi_n\}$, avec Φ_n ensmble fini, tel que $V_n \subset U_n$. Alors $D = \cup_n \Phi_n$ est dénombrable. Montrons que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\, D$ est dense en montrant que toute forme linéaire qui s'annule sur D est en fait identiquement nulle : si $(f, x) = 0$, alors $f \in \cap_n V_n \subset \cap_n U_n = \{0\}$. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\, D$ est donc une partie dénombrable dense de E.

Ce dernier point est une conséquence du théorème d'Hahn-Banach. Si $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\, D$ n'était pas dense, on pourrait trouver $x \in E \setminus \overline{F}$, et il existerait $l \in E'$ séparant $\{x\}$ convexe compact, et $\overline{F}$ converxe fermé. On aurait donc par exemple, $l(y) < c < l(x)$ pour tout $y \in \overline{F}$ et donc par homogénéité, $l = 0$ sur $\overline{F}$. Par contre on aurait $l(x) > 0$, et donc l ne serait pas identiquement nulle.

⋆

Solution 2. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. Voir exercice précédent.

2. Soit $\phi^k \in \ell^1$ définie par $\phi_i^k = \delta_i^k$. Alors $(u^n, \phi^k) = u_k^n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

3. Si u^n ne tend pas vers 0 dans ℓ^1, alors, il existe $\epsilon > 0$ et une sous-suite $u^{\phi(n)}$ extraite telle que $\|u^{\phi(n)}\| \geq \epsilon$. On considère maintenant $v^n = \frac{u^{\phi(n)}}{\|u^{\phi(n)}\|_{\ell^1}}$. On a $\|v_n\|_{\ell^1} = 1$ et pour tout $w \in \ell^1$, $|(v^n, w)| \leq \frac{1}{\epsilon}|(u^{\phi(n)}, w)| \longrightarrow 0$.

4. Comme $\sum |u_j^0| = 1$, il existe a_1 tel que $\sum_{j=0}^{a_1 - 1} |u_j^0| \geq \frac{3}{4}$. Supposons a_k et n_{k-1} construits. D'après la question 2, il existe $n_k > n_{k-1}$ tel que $\sum_{j=0}^{a_k - 1} |u_j^{n_k}| \leq \frac{1}{8}$. Comme $\sum |u_j^{n_k}| = 1$, il existe donc $a_{k+1} > a_k$ tel que $\sum_{j=a_k}^{a_{k+1}-1} |u_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4}$.

5. La suite v définie par $v_j = sgn(u_j^{n_k})$ pour $a_k \leq j \leq a_{k+1} - 1$ fonctionne.

⋆

Solution 3. *Convergence faible mais pas forte : trois exemples fondamentaux*

1. On raisonne par densité de $\mathcal{D}$ dans L^2. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in D$, $\int u_n \psi \to 0$, ce qui est immédiat (support disjoints si n assez grand). Comme $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

2. Pour v_n, il suffit de constater que $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2. Comme $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, cette convergence ne peut pas être forte.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^1_{per}((0, 2\pi))$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int e^{iknx}\psi(x)dx = -\frac{1}{ikn}\int e^{iknx}\psi'(x)dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$. Comme $e^{iknx} \rightharpoonup \delta_{0,k}$ quand $n \to +\infty$, on trouve que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_N^n = \sum_{|k|\leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme $w_N^n \to w(n\cdot)$ quand $N \to +\infty$ dans $L^2((0, 2\pi))$, et ceci uniformément par rapport à n, on a :

$$| < w(n\cdot) - a_0, \phi > | \leq | < w_N^n - a_0, \phi > | + | < w(n\cdot) - w_N^n, \phi > | \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Conclusion : $w(n\cdot) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2(0, 2\pi)$. Évidemment la suite $(w(n\cdot))_n$ ne converge pas fortement car $\|w_n\|_{L^2(0,2\pi)} = \|w\|_{L^2} \neq \|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w\|_{L^2((0,2\pi))}$ (cf cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz).

⋆

Solution 4. *Théorème de représentation sur* $(L^1)'$

1. L'aplication $f \mapsto < \Phi, wf >$ est une forme linéaire continue sur L^2. Il existe donc $v \in L^2$ tel que $< \Phi, wf >= \int vf$ pour tout $f \in L^2$. On va poser $u = \frac{v}{w}$. On remarque que Φ et $f \mapsto \int uf$ coïncident sur les fonctions L^2 à support compact.

2. Montrons que u est dans L^∞ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Soit $C > \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Notons $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$. Montrons que A est négligeable. Pour cela on va montrer que $A \cap K$ est négligeable pour tout compact K. Comme $\operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}$ est à support compact on a

$$< \Phi, \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >= \int u \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} \geq \operatorname{mes}(A \cap K)C,$$

et de plus

$$< \Phi, \operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >\leq \|\Phi\|_{(L^1)'}\|\operatorname{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}\|_{L^1} = \|\Phi\|_{(L^1)'} \operatorname{mes}(A \cap K),$$

donc $\operatorname{mes}(A \cap K) = 0$.

Comme $u \in L^\infty$, $f \mapsto \int uf$ est une forme linéaire sur L^1, de norme inférieure ou égale à $\|u\|_{L^\infty}$. Φ et $f \mapsto \int uf$ sont donc des formes linéaires continues sur L^1 qui coïncident sur un sous espace dense, donc elles sont égales.

3. Soit $f : x_0 \in \Omega$. Considérons l'application $u \mapsto u(x_0)$ qui est définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, les fonctions continues à support compact. On a $u(x_0) \leq \|u\|_{L^\infty}$ donc d'après le théorème de Hahn Banach, on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur L^∞. Supposons qu'il existe $g \in L^1$ telle que $< f, u >= \int gu$ pour tout $u \in L^\infty$. Alors pour toute fonction continue à support compact dans $\Omega \setminus \{x_0\}$ on a $\int gu = 0$, donc $u = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ donc sur Ω.

⋆

Solution 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = sup_n \int_{\{f_n \geq k\}} |f_n| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Pour k fixé, la suite $(f_n^k)_n$ est bornée par k. On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule unité de L^∞ : on peut extraire une sous-suite de $f_{\phi_k(n)}^k$ qui converge pour la topologhie faible étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ (vers $f^k \in L^\infty$). Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ donc $f_{\phi_k(n)}^k$ converge en fait pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ et $f^k \in L^1$. Il faut faire attention à extraire les sous suites les unes des autres pour avoir pour tout $k \leq l$ $f_{\phi_l(n)}^k$ converge.

3. f^k est une suite croissante (pour tout $g > 0$ continue à support compact on a $\int (f_{\phi_{k+1}(n)}^{k+1} - f_{\phi_{k+1}(n)}^k) g > 0$ donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat souhaité). De plus $\|f^k\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1} < +\infty$, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone qui dit que f^K converge dans L^1 vers f.

4. Soit $g \in L^\infty$. Soit $\epsilon > 0$. On décompose

$$|\int (f_{\phi_n(n)} - f)g| = |\int (f_{\phi_n(n)} - f_{\phi_n(n)}^k)g + \int (f_{\phi_n(n)}^k - f^k)g + \int (f^k - f)g|.$$

Soit k tel que $\|g\|_{L^\infty}(\sup_n \int |f_n - f_n^k|_{L^1} + \|f^k - f\|_{L^1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On choisit alors n tel que $|\int (f_{\phi_n(n)}^k - f^k)g| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

5. L'ensemble $\mathfrak{X}$ est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de $\mathfrak{X}$ converge L^1 vers u, alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u. On voit facilement que u est à un ensemble négligeable près à valeurs dans $\{0, 1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, par exemple en exploitant le fait que (f_n) est une partie bornée de L^1 et le théorème de convergence dominée.

6. On utilise alors le théorème de Baire sur $\mathfrak{X}$ (qui est complet comme fermé de L^1), puisque de toute évidence, $\mathfrak{X} = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (en utilisant la convergence L^1-faible de f_k vers f). Un X_n au moins est d'intérieur non vide ; il existe $E \subset \Omega$ et $\delta > 0$ tel que

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_F (f_k - f)| \leq \varepsilon \text{ pour } F = E \cup A \text{ et } F = E \backslash A.$$

On en déduit facilement :

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_A (f_k - f)| \leq 2\varepsilon,$$

Cela implique l'uniforme intégrabilité car A_k^+ et A_k^- définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$) sont de mesure inférieure à $|A|$.

⋆

Solution 6. *L^∞ n'est pas séparable*

1. Supposons E séparable. Soit $\{x_n\}$ dénombrable dense. Pour tout i, on choisit n_i tel que $x_{n_i} \in O_i$. L'application $i \in I \mapsto n_i$ est injective car $O_i \cap O_j = \varnothing$ pour $i \neq j$. I est donc dénombrable : absurde.

2. Pour tout $a \in \Omega$, on fixe $r_a < \text{dist}(a, {}^c\Omega)$. On considère la famille $O_a = \{f \in L^\infty, \|f - \mathbb{1}_{B(a,r_A)}\|_{L^\infty} < \frac{1}{3}\}$. Les O_A vérifient bien les hypothèses de la question précédente.

$\star$

Solution 7. *Uniforme intégrabilité*

1. Si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Notons $C = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_1$. Soit $f \in \mathcal{F}$ Notons pour tout $a > 0$:

$$A_a = \{x, |f|(x) \geq a\}.$$

On a $a\ mes(A_a) \leq \int_\Omega |f| \leq C$ pour tout $a > 0$ donc pour $a \geq \frac{C}{\delta}$ on a $mes(A_a) \leq \delta$, ce qui implique que

$$\int_{A_a} |f| \leq \epsilon.$$

Comme ceci est valable pour tout f, (1) est vérifiée.

Si (1) est vérifiée, on a pour tout $a > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,

$$\int_A |f| \leq a\ mes(A) + \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $a > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon/2$ et $\delta = \epsilon/(2a)$. On a alors si $mes(A) \leq \delta$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f| \leq a\ mes(A) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f| \leq \epsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\epsilon > 0$ et a_0 telle que $|a|/g(|a|) \leq \epsilon$ si $|a| \geq a_0$. ALors pour tout $a > a_0$:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|).$$

On peut donc conclure par la caractérisation du 1..

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On peut supposer que $(a_n)_n$ est croissante. Posons

$$g(x) = \sum_n 1_{\{x\geq a_n\}} |x|.$$

Alors $g(|x|)/|x| = card\{n,\ a_n \leq |x|\} \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. Enfin,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$$

est clair.

$\star$