Correction du Td n° 2 d'Analyse fonctionnelle

Dualité dans les espaces de Banach 2

Séance du 20 février 2015

Solution 1. *Métrisabilité de la boule unité de E' pour la topologie faible**

1. Considérons un voisinage faible, de la forme $V = \cap_{i \geq N}\{l \in B_{E'}, -\varepsilon \leq (l, x_i) \leq \varepsilon\}$. Par densité, pour $i \leq N$ il existe x_{n_i} tels que $\|x_{n_i} - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $A = \max n_i$. Alors $B_d(0, \frac{\varepsilon}{2A}) \subset V$. En effet si $l \in B_d(0, \frac{\varepsilon}{A})$ alors

$$|(l, x_i)| \leq |(l, x_i - x_{i_n})| + |(l, x_{i_n})| \leq \|l\| \|x_i - x_{i_n}\| + \frac{\varepsilon}{2A} 2^{n_i} \leq \varepsilon.$$

(On a utilisé $\|l\| \leq 1$.) Réciproquement, une boule $B_d(0, 2\varepsilon)$ contient un ouvert faible de la forme $V = \cap_{n \geq N}, \{l \in E', -\varepsilon \leq (l, x_n) \leq \varepsilon\}$, avec $2^{-N} \leq \varepsilon$ En effet si $l \in V$ alors

$$d(l, 0) \leq \sum_{n \leq N} \frac{1}{2^N} |(l, x_n)| + \sum_{n > N} \frac{1}{2^N} |(l, x_n)| \leq \varepsilon + \frac{1}{2^N} \leq 2\varepsilon.$$

On a aussi utilisé $|(l, x_n)| \leq \|l\| \|x_n\| \leq 1$.

2. Réciproquement, supposons $B_{E'}$ métrisable. Soit $U_n = \{f \in B_{E'}, d(f, 0) < \frac{1}{n}\}$. Il existe $V_n = \{f \in B_{E'}, |(f, x)| < \epsilon_n \forall x \in \Phi_n\}$, avec Φ_n ensmble fini, tel que $V_n \subset U_n$. Alors $D = \cup_n \Phi_n$ est dénombrable. Montrons que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} D$ est dense en montrant que toute forme linéaire qui s'annule sur D est en fait identiquement nulle : si $(f, x) = 0$, alors $f \in \cap_n V_n \subset \cap_n U_n = \{0\}$. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} D$ est donc une partie dénombrable dense de E.

Ce dernier point est une conséquence du théorème d'Hahn-Banach. Si $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} D$ n'était pas dense, on pourrait trouver $x \in E \setminus \overline{F}$, et il existerait $l \in E'$ séparant $\{x\}$ convexe compact, et $\overline{F}$ converxe fermé. On aurait donc par exemple, $l(y) < c < l(x)$ pour tout $y \in \overline{F}$ et donc par homogénéité, $l = 0$ sur $\overline{F}$. Par contre on aurait $l(x) > 0$, et donc l ne serait pas identiquement nulle.

⋆

Solution 2. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

1. Vu la forme d'un voisinage élémentaire, il suffit de montrer qu'une intersection finie hyperplans n'est pas réduite à $\{0\}$. Supposons que $\cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i = \{0\}$ où ℓ_i est une famille finie de E', et considérons $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\ell_1(x), \ldots, \ell_n(x))$. Alors Φ est injective vu la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq n$, ce qui est absurde. Il existe donc $x \in \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i \setminus \{0\}$ et $x\mathbb{R} \subset \cap_{i=1}^n \operatorname{Ker} \ell_i$, donc $x\mathbb{R}$ est contenu dans tout voisinage élémentaire ne faisant intervenir que les ℓ_i.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$, et soit V un voisinage faible contenant x_0. V contient donc une droite passant par x_0, et par continuité, cette droite intersecte $\mathbb{S}$. x_0 est donc dans l'adhérence faible de $\mathbb{S}$.

3. Soit $x_0 \in E \setminus \mathbb{B}$. Comme $\mathbb{B}$ est fermée pour la topologie forte, on peut utiliser le théorème de Hahn Banach qui nous donne une forme linéaire l séparant strictement $\mathbb{B}$ et $\{x_0\}$: il existe alors c tel que par exemple, $x_0 \in \{l(y) > c\}$ et $\mathbb{B} \in \{l(y) < c\}$, sonc x_0 n'est pas dans l'adhérence faible de $\mathbb{B}$.

$\star$

Solution 3. *Théorème de représentation sur* $(L^1)'$

1. L'aplication $f \mapsto < \Phi, wf >$ est une forme linéaire continue sur L^2. Il existe donc $v \in L^2$ tel que $< \Phi, wf >= \int vf$ pour tout $f \in L^2$. On va poser $u = \frac{v}{w}$. On remarque que Φ et $f \mapsto \int uf$ coïncident sur les fonctions L^2 à support compact.

2. Montrons que u est dans L^∞ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Soit $C > \|\Phi\|_{(L^1)'}$. Notons $A = \{x \in \Omega, |u(x)| > C\}$. Montrons que A est négligeable. Pour cela on va montrer que $A \cap K$ est négligeable pour tout compact K. Comme $\mathrm{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}$ est à support compact on a

$$< \Phi, \mathrm{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >= \int u\,\mathrm{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} \geq \mathrm{mes}(A \cap K)C,$$

et de plus

$$< \Phi, \mathrm{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K} >\leq \|\Phi\|_{(L^1)'}\|\,\mathrm{sgn}(u)\mathbb{1}_{A\cap K}\|_{L^1} = \|\Phi\|_{(L^1)'}\,\mathrm{mes}(A \cap K),$$

donc $\mathrm{mes}(A \cap K) = 0$.

Comme $u \in L^\infty$, $f \mapsto \int uf$ est une forme linéaire sur L^1, de norme inférieure ou égale à $\|u\|_{L^\infty}$. Φ et $f \mapsto \int uf$ sont donc des formes linéaires continues sur L^1 qui coïncident sur un sous espace dense, donc elles sont égales.

3. Soit $f : x_0 \in \Omega$. Considérons l'application $u \mapsto u(x_0)$ qui est définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$, les fonctions continues à support compact. On a $u(x_0) \leq \|u\|_{L^\infty}$ donc d'après le théorème de Hahn Banach, on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur L^∞. Supposons qu'il existe $g \in L^1$ telle que $< f, u >= \int gu$ pour tout $u \in L^\infty$. Alors pour toute fonction continue à support compact dans $\Omega \setminus \{x_0\}$ on a $\int gu = 0$, donc $u = 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \{x_0\}$ donc sur Ω.

$\star$

Solution 4. *Uniforme intégrabilité*

1. Si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Notons $C = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_1$. Soit $f \in \mathcal{F}$ Notons pour tout $a > 0$:

$$A_a = \{x, |f|(x) \geq a\}.$$

On a $a\ mes(A_a) \leq \int_\Omega |f| \leq C$ pour tout $a > 0$ donc pour $a \geq \frac{C}{\delta}$ on a $mes(A_a) \leq \delta$, ce qui implique que

$$\int_{A_a} |f| \leq \epsilon.$$

Comme ceci est valable pour tout f, (1) est vérifiée.

Si (1) est vérifiée, on a pour tout $a > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,

$$\int_A |f| \leq a\ mes(A) + \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f|.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $a > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon/2$ et $\delta = \epsilon/(2a)$. On a alors si $mes(A) \leq \delta$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f| \leq a\ mes(A) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}\cap A} |f| \leq \epsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\epsilon > 0$ et a_0 telle que $|a|/g(|a|) \leq \epsilon$ si $|a| \geq a_0$. ALors pour tout $a > a_0$:

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f| \leq \epsilon \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|).$$

On peut donc conclure par la caractérisation du 1..

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit a_n tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq a_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On peut supposer que $(a_n)_n$ est croissante. Posons

$$g(x) = \sum_n 1_{\{x\geq a_n\}}|x|.$$

Alors $g(|x|)/|x| = card\{n,\ a_n \leq |x|\} \to +\infty$ quand $|x| \to +\infty$. Enfin,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$$

est clair.

⋆

Solution 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = sup_n \int_{\{f_n\geq k\}} |f_n| \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow \infty$.

2. Pour k fixé, la suite $(f_n^k)_n$ est bornée par k. On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule unité de L^∞ : on peut extraire une sous-suite de $f^k_{\phi_k(n)}$ qui converge pour la topologhie faible étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ (vers $f^k \in L^\infty$). Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ donc $f^k_{\phi_k(n)}$ converge en fait pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$ et $f^k \in L^1$. Il faut faire attention à extraire les sous suites les unes des autres pour avoir pour tout $k \leq l$ $f^k_{\phi_l(n)}$ converge.

3. f^k est une suite croissante (pour tout $g > 0$ continue à support compact on a $\int(f^{k+1}_{\phi_{k+1}(n)} - f^k_{\phi_{k+1}(n)})g > 0$ donc en passant à la limite quand $n \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat souhaité). De plus $\|f^k\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_n\|_{L^1} < +\infty$, donc on peut appliquer le théorème de convergence monotone qui dit que f^K converge dans L^1 vers f.

4. Soit $g \in L^\infty$. Soit $\epsilon > 0$. On décompose

$$|\int(f_{\phi_n(n)} - f)g| = |\int(f_{\phi_n(n)} - f^k_{\phi_n(n)})g + \int(f^k_{\phi_n(n)} - f^k)g + \int(f^k - f)g|.$$

Soit k tel que $\|g\|_{L^\infty}(\sup_n \int |f_n - f_n^k|_{L^1} + \|f^k - f\|_{L^1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. On choisit alors n tel que $|\int(f^k_{\phi_n(n)} - f^k)g| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

5. L'ensemble $\mathfrak{X}$ est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de $\mathfrak{X}$ converge L^1 vers u, alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u. On voit facilement que u est à un ensemble négligeable près à valeurs dans $\{0, 1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, par exemple en exploitant le fait que (f_n) est une partie bornée de L^1 et le théorème de convergence dominée.

6. On utilise alors le théorème de Baire sur $\mathfrak{X}$ (qui est complet comme fermé de L^1), puisque de toute évidence, $\mathfrak{X} = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (en utilisant la convergence L^1-faible de f_k vers f). Un X_n au moins est d'intérieur non vide ; il existe $E \subset \Omega$ et $\delta > 0$ tel que

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_F (f_k - f)| \leq \varepsilon \text{ pour } F = E \cup A \text{ et } F = E\backslash A.$$

On en déduit facilement :

$$|A| \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n,\ |\int_A (f_k - f)| \leq 2\varepsilon,$$

Cela implique l'uniforme intégrabilité car A_k^+ et A_k^- définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$) sont de mesure inférieure à $|A|$.

⋆

Solution 6. *Fonction convexe conjuguée*

1. Le supremum d'une famille de fonction convexes (resp. s.c.i) est convexe (resp. s.c.i).

2. Supposons d'abord que $\phi \geq 0$. Par définition de ϕ^*, on a pour tout $(f, x) \in E' \times E$:

$$< f, x >_{E'\times E} \leq \phi(x) + \phi^*(f).$$

On en déduit immédiatement que $\phi^{**} \leq \phi$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\phi^{**}(x_0) < \phi(x_0)$. Notons A l'épigraphe de ϕ. C'est un ensemble fermé et convexe car ϕ est s.c.i convexe. On peut donc séparer $\{x_0, \phi^{**}(x_0)\}$ de A au sens strict dans $E \times \mathbb{R}$. Donc il existe $f \in E'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que

$$< f, x >_{E'\times E} + k\lambda > \alpha \ \forall (x, \lambda) \in A,$$

$$< f, x_0 >_{E'\times E} + k\phi^{**}(x_0) < \alpha.$$

En choisissant une suite $\lambda_n \to +\infty$, on obtient que $k \geq 0$ (mais attention, on peut éventuellement avoir $k = 0$, dans le cas où $D(E) \neq E$). Soit $\epsilon > 0$, alors comme $\phi \geq 0$, on a

$$< f, x >_{E'\times E} + (k + \epsilon)\phi(x) \geq \alpha \ \forall x \in E.$$

D'où $\phi^*(\frac{-f}{k+\epsilon}) \leq \frac{-\alpha}{k+\epsilon}$. D'après la définition de ϕ^{**}, il vient

$$\phi^{**}(x_0) \geq < \frac{-f}{k+\epsilon}, x_0 > -\phi^*(\frac{-f}{k+\epsilon}) \geq < \frac{-f}{k+\epsilon}, x_0 > + \frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

Par suite

$$< f, x_0 > + (k + \epsilon)\phi^{**}(x_0) \geq \alpha.$$

Comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, cela contredit $\phi^{**}(x_0) < \phi(x_0)$.

Si ϕ n'est plus positive, fixons $f_0 \in E'$ et posons

$$\psi(x) = \phi(x) - < f_0, x > + \phi^*(f_0).$$

Cette fonction est convexe, s.c.i et positive, donc $\psi^{**} = \psi$. Or on calcule facilement

$$\psi^*(f) = \phi^*(f + f_0) - \phi^*(f_0)$$

et

$$\psi^{**}(x) = \phi^{**}(x) - < f_0, x > + \phi^*(f_0).$$

D'où la conclusion.

⋆