Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\mathrm{o}}$ 2

Théorème de Hahn-Banach

Séance du 6 février 2017

Solution 1. *Séparabilité du dual d'un espace normé*

1. Le critère de densité est le suivant : soit E un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé. Soit F un sous-espace de E tel que toute forme linéaire continue nulle sur F est nulle sur E. Alors $\overline{F} = E$. (Remarquer aussi que la réciproque est vraie.)

En effet, si $\overline{F} \subsetneq E$, alors on peut trouver $\ell \in E^*$ qui sépare strictement $\{x\}$ et $\overline{F}$. En particulier, ℓ est bornée sur F, donc nulle sur F. Il existe donc bien une forme linéaire continue non nulle sur E (car $\ell(x) \neq 0$), mais nulle sur F.

2. Soit $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense d'éléments (non nuls) de E^*. Par définition de la norme sur E^*, il existe $x_n \in E$ tel que $|\ell_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n\|_E\|\ell_n\|_{E^*}$. Montrons que $F = \mathrm{Vect}\{x_n\}$ est dense. En effet, si ℓ est nulle sur F, alors en particulier $\ell(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or il existe des entiers n_k tel que $\ell_{n_k} \to \ell$ quand $k \to +\infty$. Mais alors,

$$\frac{1}{2}\|x_{n_k}\|_E\|\ell_{n_k}\|_{E^*} \leq |\ell_{n_k}(x_{n_k}) - \ell(x_{n_k})| \leq \|x_{n_k}\|_E\|\ell_{n_k} - \ell\|_{E^*}.$$

Donc $\|\ell_{n_k}\|_{E^*} \to 0$, ce qui prouve que $\ell = 0$. Comme F est séparable (considérer par exemple l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficiens rationnels des x_n), E l'est aussi.

3. Montrons que ℓ^1 est séparable, mais pas ℓ^∞. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\delta_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$. Il est clair que $\mathrm{Vect}\{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$, et donc ℓ^1 est séparable.

D'autre part, étant donné une partie $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, on peut considérer la suite $\mathbb{1}_{\mathcal{P}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. On voit que pour $\mathcal{P}$ décrivant les parties de $\mathbb{N}$, les boules ouvertes $B_{\ell^\infty}(\mathbb{1}_{\mathcal{P}}, 1/3)$ sont disjointes (en effet, si $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}'$ sont deux parties de $\mathbb{N}$, $\|\mathbb{1}_{\mathcal{P}} - \mathbb{1}_{\mathcal{P}'}\|_{\ell^\infty} = 1$). S'il existait une suite dense dans ℓ^∞, chacune des boules $B_{\ell^\infty}(\mathbb{1}_{\mathcal{P}}, 1/2)$ contiendrait au moins un élément de cette suite ; mais on a un nombre non-dénombrable de boules disjoints : c'est donc absurde, ℓ^∞ n'est pas séparable. En particulier, le dual de ℓ^∞ n'est pas isomorphe à ℓ^1.

Pour construire grâce à Hahn-Banach une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui ne se représente pas à l'aide d'une suite de ℓ^1, on considère ℓ_0 définie pour toute suite v convergente par $\ell_0(v) = \lim v$, et étendue à ℓ^∞ grâce à Hahn-Banach en une forme linéaire ℓ de norme 1. Si ℓ s'identifiait à un $u = \{u_n\} \in \ell^1$ via

$$\ell(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n, \quad v \in \ell^\infty,$$

on aurait $u_n = \ell(\delta_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\|\ell\| = 1$.

⋆

Solution 2. *Application du critère dual de densité*

1. Soit ℓ une forme linéaire continue sur ℓ^p et nulle sur V. Comme $p < +\infty$, on sait que ℓ s'identifie à une suite $\beta = \{\beta(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, où q est l'exposant conjugué de p. En particulier, on a

$$0 = \ell(u_k) = \sum_{n\geq 0} \beta(n)u_k(n) = \sum_{n\geq 0} \beta(n)\alpha_k^n.$$

Définissons donc la fonction $f(z) := \sum_j \beta(j)z^j$, qui converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$ puisque $\beta(j) \to 0$ quand $j \to +\infty$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_k) = 0$, et comme les α_k s'accumulent en 0, le principe des zéros isolés stipule que f est identiquement nulle. Donc $\beta = 0$, et par conséquent $\ell = 0$.

2. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, nulle sur W. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \ell(-a_n \cdot f_{a_n}) = \ell\left(\frac{1}{1-\frac{x}{a_n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\ell(x^j)}{a_n^j},$$

où nous avons utilisé la continuité de ℓ pour la permutation avec le signe somme. Comme l'égalité précédente est vraie pour tout n, cela pousse à définir une fonction génératrice $f(z) := \sum_j \ell(x^j)z^j$. Cette série converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$, car $|\ell(x^j)| \leq \|\ell\|$ pour tout $j \geq 0$. Or f s'annule en tous les $1/a_n$, qui forment une suite qui s'accumule en 0. D'après le principe des zéros isolés, on sait donc que $f \equiv 0$, donc que $\ell(x^j) = 0$ pour tout $j \geq 0$. Donc ℓ s'annule sur tous les polynômes qui, d'après le théorème de Weiertrass, forment un ensemble dense de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, et donc $\ell = 0$ par continuité.

$\star$

Solution 3. *Hahn-Banach en dimension finie*

1. Si $x \notin \overline{C}$, alors on peut séparer (au sens strict) x du convexe fermé $\overline{C}$, et il n'y a rien à prouver.

À partir de maintenant, on considère donc $x \in \overline{C} \setminus C$, et on suppose sans perte de généralité que $0 \in C$. On suppose également, quitte à se restreindre à un sous-espace plus petit, que l'espace vectoriel engendré par C est $\mathbb{R}^d$ tout entier. On va montrer, en plusieurs étapes, que l'on peut approcher x par une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

— Observons déjà que $\mathring{C} \neq \emptyset$. En effet, soient $e_1, \ldots, e_d$ des éléments de C qui engendrent $\mathbb{R}^d$. Alors l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^{d} t_j e_j \;\middle|\; \forall 1 \leq j \leq d,\ t_j \geq 0,\ \text{et } \sum_{j=1}^{d} t_j \leq 1 \right\}$$

est inclus dans C, et contient une boule de $\mathbb{R}^d$.

— On va maintenant prouver que si $x \in \overline{C} \setminus C$, alors $x \in \partial\overline{C}$, la frontière de $\overline{C}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\overline{C} \setminus \mathring{\overline{C}}$). Pour cela, il suffit de montrer que $\mathring{\overline{C}} \subseteq C$. Soit donc $w \in \mathring{\overline{C}}$, et un point $v \in \mathring{C}$ quelconque. Quand $t \to 1^-$, $v + \frac{w-v}{t} \to w$. Donc il existe un $0 < t < 1$ tel que $u := v + \frac{w-v}{t} \in \overline{C}$. On a $w = tu + (1-t)v$. À présent, soit $r > 0$ tel que $B(v,r) \subseteq C$. Par définition de $\overline{C}$, $B(u, \frac{1-t}{t}r)$ intersecte C en un point que l'on note u'. Considérons aussi v' tel que $w = tu' + (1-t)v'$. En soustrayant les deux égalités sur w, nous obtenons donc

$$v' - v = \frac{t}{1-t}(u - u'),$$

donc $v' \in B(v,r)$, c'est-à-dire $v' \in C$. Par convexité, w est donc également dans C.

— Enfin, remarquons que la frontière de $\overline{C}$ est égale à la frontière de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$, car c'est vrai pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\partial(\mathbb{R}^d \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^d \setminus A} \setminus \overset{\circ}{\widehat{(\mathbb{R}^d \setminus A)}} = (\mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

Cela achève de prouver qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$ convergeant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n un hyperplan séparant x_n de $\overline{C}$ et e_n un vecteur unitaire tel que $H_n = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_n, y\rangle = \alpha_n\}$. La propriété de séparation signifie que

$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_n, z\rangle \leq \alpha_n \leq \langle e_n, x_n\rangle.$$

Comme la boule unité de $\mathbb{R}^d$ est compacte, et que la suite $\{\alpha_n\}$ est bornée, il existe une sous-suite $\{e_{n'}\}_{n'}$ convergeant vers un certain e_∞ de norme 1, avec de surcroît $\alpha_{n'} \to \alpha_\infty$. En passant à la limite, on a donc

$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_\infty, z\rangle \leq \alpha_\infty \leq \langle e_\infty, x\rangle.$$

Donc l'hyperplan $H_\infty = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_\infty, y\rangle = \alpha_\infty\}$ sépare x de C au sens large.

2. Soit un espace E où les points peuvent être séparés de tout convexe qui ne les contient pas, et soit C un convexe quelconque dont l'adhérence est E. Supposons qu'il existe $x \in E$ qui n'est pas dans C, et soit ℓ une forme linéaire qui sépare $\{x\}$ et C. Alors (quitte à changer ℓ en $-\ell$) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C \subseteq \ell^{-1}(]-\infty, \alpha])$, qui est fermé. Donc $\overline{C} \subseteq \ell^{-1}(]-\infty, \alpha])$, et $x \notin \overline{C}$, ce qui contredit l'hypothèse.

En dimension infinie, soit par exemple $E = L^1([0,1])$ muni de sa norme L^1, et $F = C^0([0,1])$. F est un convexe dense dans E. Si $f \in E \setminus F$, alors on ne peut pas séparer f de F, par densité de f.

⋆

Solution 4. *L'application J*

1. $\|\cdot\|$ est convexe : on choisit $\ell(tx) = t\|x\|$ sur $\mathbb{R}x$, et Hahn-Banach permet de conclure.

Par exemple, si $E = \ell^1$ et $\ell = \{1 - \frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$, alors $\|\ell\|_{\ell^\infty} = 1$, mais pour tout $x \in \ell^1$ de norme 1, on a $|\ell(x)| < 1$.

2. Pour tout $\ell \in E^*$, on a $|J(x)(\ell)| = |\ell(x)| \leq \|\ell\|_{E^*}\|x\|_E$ donc $\|J(x)\|_{E^{**}} \leq \|x\|_E$. D'après la première question, on a l'égalité, et J est donc une isométrie.

Si E est un Banach, soit x_n tel que $J(x_n) \to y \in E^{**}$. La suite $\{J(x_n)\}$ est de Cauchy, donc

$$\|x_n - x_m\|_E = \|J(x_n - x_m)\|_{E^{**}} = \|J(x_n) - J(x_m)\|_{E^{**}} \to 0.$$

Donc $\{x_n\}$ est de Cauchy, donc converge vers un $x \in E$. Comme J est continue, $J(x_n) \to J(x)$, ce qui prouve que l'image de J est fermée.

Réciproquement, si l'image est fermée, comme $E^{**} = \mathcal{L}(E', \mathbb{R})$, et que $\mathbb{R}$ est complet, E^{**} est un Banach, donc l'image de J, étant fermée, est un Banach. Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy de E : par les mêmes calculs qu'avant, $\{\Phi(x_n)\}$ est une suite de Cauchy dans l'image, donc converge vers un $\Phi(x) \in \mathrm{Im}(J)$. Comme J est isométrique, $x_n \to x$, et donc E est complet.

3. Si E est réflexif, J est un homéomorphisme linéaire entre E et E^{**}. Soit $f \in E^{***}$. Pour tout $z \in E^{**}$, il existe $x \in E$ tel que $z = J(x)$. Donc $f(z) = (f \circ J)(x) = J(x)(f \circ J) = z(f \circ J)$. Comme $f \circ J \in E^*$, l'application $\tilde{J} : E^* \to E^{***}$ est bien surjective, et donc E^* est réflexif.

Réciproquement, si E^* est réflexif, on a bien sûr toujours $J(E) \subseteq E^{**}$. Supposons que l'inclusion est stricte, et soit $z \in E^{**} \setminus J(E)$. On définit ℓ par linéarité sur $\mathbb{R}z \oplus J(E)$ par $\ell(z) = \|z\|_{E^{**}}$, et $\ell(y) = 0$ si $y \in J(E)$. ℓ est continue car $J(E)$ est fermé, et non nulle. Par Hahn-Banach, ℓ s'étend à E^{**} en une forme linéaire continue non nulle, toujours notée ℓ. E^* étant réflexif, il existe $\tilde{\ell} \in E^*$ tel que $\ell = \tilde{J}(\tilde{\ell})$ (où $\tilde{J} : E^* \to E^{**}$), et $\tilde{\ell}$ est non nulle. Mais pour tout $x \in E$,

$$\tilde{\ell}(x) = J(x)(\tilde{\ell}) = \tilde{J}(\tilde{\ell})(J(x)) = \ell(J(x)) = 0,$$

donc $\tilde{\ell} = 0$, ce qui est contradictoire.

$\star$

Solution 5. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

1. Il y a plusieurs points à vérifier :

- L'application q est bien définie. En effet, pour $x \in E$ et $u \in \mathcal{C}$, on a $p(u(x)) \geq -p(-u(x)) = -p(u(-x))$. Or on peut écrire $u = \sum_{j=1}^N t_j u_j$, où chaque u_j est un produit fini d'éléments de $\mathcal{F}$ (ou l'identité), et $\sum_{j=1}^N t_j = 1$. Donc

$$p(u(x)) \geq -p(u(-x)) \geq -\sum_{j=1}^N t_j p(u_j(-x)) = -\sum_{j=1}^N t_j p(-x) = -p(-x),$$

en utilisant l'invariance de p.
- Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}$. On a $p(u(\lambda x)) = p(\lambda u(x)) = \lambda p(u(x))$, et en prenant l'infimum sur u, on trouve que $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.
- La sous-additivité de q est un peu plus délicate. Soient $x, y \in E$, et deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $q(x) = \lim p(u_n(x))$ et $q(y) = \lim q(v_n(y))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et écrivons $u_n = \sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}$, et $v_n = \sum_{j=1}^M s_j v^{(j)}$. Alors $q(x+y) \leq p((u_n \circ v_n)(x+y)) \leq p(v_n \circ u_n(x)) + p(u_n \circ v_n(y))$, où l'on utilise de manière cruciale que $\mathcal{F}$ est commutative. Il suffit maintenant d'observer que

$$p(v_n \circ u_n(x)) \leq \sum_{j=1}^M s_j p(v^{(j)}(u_n(x))) = p(u_n(x)),$$

et de même pour y. Donc $q(x+y) \leq p(u_n(x)) + p(v_n(y))$, et en passant à la limite, on obtient la sous-additivité.
- Le fait que $q \leq p$ se lit sur la définition de q, puisque l'identité est dans $\mathcal{C}$.
- Enfin, si $x \in G$ et $u \in \mathcal{C}$, on écrit $u = \sum_{j=1}^N t_j u_j$ comme ci-dessus. Alors

$$p(u(x)) \geq \ell(u(x)) = \ell\left(\sum_{j=1}^N t_j u_j(x)\right) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(u_j(x)) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(x) = \ell(x),$$

car on peut montrer par récurrence que $\ell(u_j(x)) = \ell(x)$, comme ℓ est $\mathcal{F}$-invariante. Ainsi $\ell \leq q$ sur G.

1. On applique Hahn-Banach à ℓ et q, pour obtenir une forme linéaire sur E, toujours notée ℓ. Il faut montrer qu'elle est $\mathcal{F}$-invariante sur E. Pour cela, prenons $x \in E$ et $u \in \mathcal{F}$, et observons que, par définition de q, $q(x - u(x)) \leq p(a_n(x - u(x)))$, où $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{\circ k} \in \mathcal{C}$. Par conséquent,

$$q(x - u(x)) \leq p\left(\frac{x}{n} - \frac{u^{\circ n}(x)}{n}\right) \leq \frac{2p(x)}{n},$$

où l'on utilise de nouveau l'invariance de p. En passant à la limite, on trouve donc que $q(x - u(x)) \leq 0$. Donc $\ell(x - u(x)) \leq 0$, c'est-à-dire $\ell(x) \leq \ell(u(x))$, pour tout $u \in \mathcal{F}$, et $x \in E$. En répétant le raisonnement avec $u(x) - x$ au lieu de $x - u(x)$, on trouve donc l'autre inégalité, d'où l'invariance de ℓ sur E.

$\star$