Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 2

Théorème de Hahn-Banach

Séance du 19 février 2018

Solution 1. *Échauffement : trois questions*

1. Notons $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées. Si $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, posons $p(a) := \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Alors, pour $\lambda \geq 0$, on a clairement $p(\lambda a) = \lambda p(a)$, et en considérant des valeurs d'adhérence, on voit que $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$.

Notons $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des suites qui convergent, et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$, $a = \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to+\infty} a_n$. On voit que Λ est une forme linéaire, et $\forall a \in F$, $\Lambda(a) \leq p(a)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger Λ en une forme linéaire sur E notée L, et telle que $\forall a \in \ell^\infty$, $L(a) \leq p(a) = \limsup a_n$. Par ailleurs, $p(-a) = \limsup(-a_n) = -\liminf a_n$, donc $p(-a) \geq L(-a) = -L(a)$ prouve que l'on a, pour tout $a = \{a_n\} \in E$,

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq L(a) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

2. Il est clair que toute suite $\{a_k\} \in \ell^1$ induit une forme linéaire continue sur c_0 via $\varphi_a : \{u_k\} \mapsto \sum_k a_k u_k$. On a $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_{\ell^1}$. À présent, soit $\varphi \in (c_0)^*$. Posons $a_k := \varphi(\delta_k)$, où δ_k est la suite qui vaut 1 en k, et 0 ailleurs. Soit ε_k un signe tel que $\varphi(\varepsilon_k\delta_k) = |a_k|$. Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-M}^{M} |a_k| = \varphi\left(\sum_{k=-M}^{M} \varepsilon_k \delta_k\right) \leq \|\varphi\|.$$

Cela prouve que $a = \{a_k\} \in \ell^1$. Or φ et φ_a coïncident sur c_{00}, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donc ils coïncident aussi sur l'adhérence de c_{00}, c'est-à-dire c_0. Donc $\varphi = \varphi_a$.

Pour construire grâce à Hahn-Banach une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui ne se représente pas à l'aide d'une suite de ℓ^1, on considère ℓ_0 définie pour toute suite v convergente par $\ell_0(v) = \lim v$, et étendue à ℓ^∞ grâce à Hahn-Banach en une forme linéaire ℓ de norme 1. Si ℓ s'identifiait à un $u = \{u_n\} \in \ell^1$ via

$$\ell(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n, \quad v \in \ell^\infty,$$

on aurait $u_n = \ell(\delta_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\|\ell\| = 1$.

3. Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace fermé strict. Soit $x \in E \setminus F$, et ℓ une forme linéaire continue sur E séparant strictement le compact $\{x\}$ du fermé F. Alors on a

$$\forall y \in F, \quad \ell(y) < \ell(x).$$

Nécessairement, $\ell|_F \equiv 0$, car s'il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell(y_0) \neq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on devrait avoir $t\ell(y_0) = \ell(ty_0) < \ell(x)$, ce qui est impossible. Cela prouve que $F \subseteq \ker \ell$.

⋆

Solution 2. *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn-Banach*

1. Si $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont deux prolongements de ℓ de norme 1, alors leur milieu $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2)$ est de norme supérieure ou égale à 1 (car il prolonge également ℓ, qui est déjà de norme 1 sur F). Par l'inégalité triangulaire, on trouve donc que $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2) \in S$. Comme E^* est strictement convexe, cela implique que $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}_2$, d'où l'unicité du prolongement.

2. Posons $F = \ker(\ell_1 - \ell_2)$ (qui est non réduit à $\{0\}$ par hypothèse), et φ la restriction de ℓ_1 à F. Chacun des ℓ_j constitue bien évidemment un prolongement linéaire continu de φ.

La seule chose à montrer est que l'on a bien $\|\varphi\|_{F^*} = 1$. Pour cela, on va construire une suite $\{x_n\}$ de F telle que $\langle \varphi, x_n \rangle \to 1$ et $\|x_n\|_E \to 1$ quand $n \to \infty$. Comme le milieu de ℓ_1 et ℓ_2 est dans S, on commence par choisir une suite $\{y_n\}$ de E, constituée de vecteurs de norme 1 tels que $\langle \frac{\ell_1+\ell_2}{2}, y_n \rangle \to 1$. Autrement dit, on a

$$\langle \ell_1, y_n \rangle + \langle \ell_2, y_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont de norme 1, chacun des deux termes doit converger vers 1. On choisit alors $u \in E$ tel que $\langle \ell_1 - \ell_2, u \rangle = 1$ et on pose

$$x_n = y_n - \langle \ell_1 - \ell_2, y_n \rangle u,$$

qui vérifie les propriétés souhaitées, car $\|x_n - y_n\|_E \to 0$.

3. Dans ℓ^1, on peut considérer $x = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $|\lambda| \leq 1$, $\ell = (1, \lambda, \lambda, \ldots) \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

Dans ℓ^∞, on peut considérer $x = (1, 1, 1, \ldots)$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ell_k(n) = \delta_{k=n} \in \ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

⋆

Solution 3. *Espaces L^p, $p \in]0,1[$*

1. L'application $x \mapsto x^p$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc sous-additive. On en déduit que

$$d(f,g) \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \int_0^1 (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx < +\infty,$$

donc d est bien définie. D'autre part, d est bien sûr symétrique et définie, et enfin, si $f, g, h \in L^p$, alors $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

2. La régularité de la mesure de Lebesgue permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x |f|^p$ est continue, croissante, vaut 0 en 0 et $\int_0^1 |f|^p$ en 1. Il suffit donc de choisir x_j tel que $F(x_j) = \frac{j}{n-1} \int_0^1 |f|^p$.

On a bien sûr

$$f = \frac{1}{n}(g_0^n + \cdots + g_{n-1}^n).$$

D'autre part, $\int_0^1 |g_j^n|^p = n^p \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \to 0$ uniformément en $j \in [\![0, n-1]\!]$. Pour n assez grand, il vient que $\forall j, \quad g_j^n \in V$, puis par convexité, $f \in V$. Cela prouve que $V = L^p([0,1], \mathbb{R})$.

3. Soit $\ell \in L^p([0,1], \mathbb{R})^*$. Par continuité et linéarité, $\ell^{-1}(]-1,1[)$ est un voisinage ouvert convexe de 0 : c'est donc $L^p([0,1], \mathbb{R})$ tout entier. Cela prouve que ℓ est uniformément bornée sur L^p, et grâce à la remarque de l'exercice 1, cela entraîne que $\ell = 0$.

⋆

Solution 4. *Application du critère dual de densité*

1. Soit ℓ une forme linéaire continue sur ℓ^p et nulle sur V. Comme $p < +\infty$, on sait que ℓ s'identifie à une suite $\beta = \{\beta(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$, où q est l'exposant conjugué de p. En particulier, on a

$$0 = \ell(u_k) = \sum_{n\geq 0} \beta(n) u_k(n) = \sum_{n\geq 0} \beta(n)\alpha_k^n.$$

Définissons donc la fonction $f(z) := \sum_j \beta(j) z^j$, qui converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$ puisque $\beta(j) \to 0$ quand $j \to +\infty$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_k) = 0$, et comme les α_k s'accumulent en 0, le principe des zéros isolés stipule que f est identiquement nulle. Donc $\beta = 0$, et par conséquent $\ell = 0$.

2. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, nulle sur W. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \ell(-a_n \cdot f_{a_n}) = \ell\left(\frac{1}{1-\frac{x}{a_n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\ell(x^j)}{a_n^j},$$

où nous avons utilisé la continuité de ℓ pour la permutation avec le signe somme. Comme l'égalité précédente est vraie pour tout n, cela pousse à définir une fonction génératrice $f(z) := \sum_j \ell(x^j) z^j$. Cette série converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$, car $|\ell(x^j)| \leq \|\ell\|$ pour tout $j \geq 0$. Or f s'annule en tous les $1/a_n$, qui forment une suite qui s'accumule en 0. D'après le principe des zéros isolés, on sait donc que $f \equiv 0$, donc que $\ell(x^j) = 0$ pour tout $j \geq 0$. Donc ℓ s'annule sur tous les polynômes qui, d'après le théorème de Weiertrass, forment un ensemble dense de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, et donc $\ell = 0$ par continuité.

⋆

Solution 5. *Hahn-Banach en dimension finie*

1. Si $x \notin \overline{C}$, alors on peut séparer (au sens strict) x du convexe fermé $\overline{C}$, et il n'y a rien à prouver.

À partir de maintenant, on considère donc $x \in \overline{C} \setminus C$, et on suppose sans perte de généralité que $0 \in C$. On suppose également, quitte à se restreindre à un sous-espace plus petit, que l'espace vectoriel engendré par C est $\mathbb{R}^d$ tout entier. On va montrer, en plusieurs étapes, que l'on peut approcher x par une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

- Observons déjà que $\mathring{C} \neq \emptyset$. En effet, soient $e_1, \ldots, e_d$ des éléments de C qui engendrent $\mathbb{R}^d$. Alors l'ensemble

$$\left\{ \sum_{j=1}^d t_j e_j \;\middle|\; \forall 1 \leq j \leq d,\ t_j \geq 0,\ \text{et} \ \sum_{j=1}^d t_j \leq 1 \right\}$$

  est inclus dans C, et contient une boule de $\mathbb{R}^d$.
- On va maintenant prouver que si $x \in \overline{C} \setminus C$, alors $x \in \partial\overline{C}$, la frontière de $\overline{C}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\overline{C} \setminus \mathring{\overline{C}}$). Pour cela, il suffit de montrer que $\mathring{\overline{C}} \subseteq C$. Soit donc $w \in \mathring{\overline{C}}$, et un point $v \in \mathring{C}$ quelconque. Quand $t \to 1^-$, $v + \frac{w-v}{t} \to w$. Donc il existe un $0 < t < 1$ tel que $u := v + \frac{w-v}{t} \in \overline{C}$. On a $w = tu + (1-t)v$. À présent, soit $r > 0$ tel que $B(v, r) \subseteq C$. Par définition de $\overline{C}$, $B(u, \frac{1-t}{t} r)$ intersecte C en un point que l'on note u'. Considérons aussi v' tel que $w = tu' + (1-t)v'$. En soustrayant les deux égalités sur w, nous obtenons donc

$$v' - v = \frac{t}{1-t}(u - u'),$$

donc $v' \in B(v,r)$, c'est-à-dire $v' \in C$. Par convexité, w est donc également dans C.

— Enfin, remarquons que la frontière de $\overline{C}$ est égale à la frontière de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$, car c'est vrai pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\partial(\mathbb{R}^d \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^d \setminus A} \setminus \overset{\circ}{\widehat{(\mathbb{R}^d \setminus A)}} = (\mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

Cela achève de prouver qu'il existe une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$ convergeant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n un hyperplan séparant x_n de $\overline{C}$ et e_n un vecteur unitaire tel que $H_n = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_n, y\rangle = \alpha_n\}$. La propriété de séparation signifie que

$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_n, z\rangle \leq \alpha_n \leq \langle e_n, x_n\rangle.$$

Comme la boule unité de $\mathbb{R}^d$ est compacte, et que la suite $\{\alpha_n\}$ est bornée, il existe une sous-suite $\{e_{n'}\}_{n'}$ convergeant vers un certain e_∞ de norme 1, avec de surcroît $\alpha_{n'} \to \alpha_\infty$. En passant à la limite, on a donc

$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_\infty, z\rangle \leq \alpha_\infty \leq \langle e_\infty, x\rangle.$$

Donc l'hyperplan $H_\infty = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_\infty, y\rangle = \alpha_\infty\}$ sépare x de C au sens large.

2. Soit un espace E où les points peuvent être séparés de tout convexe qui ne les contient pas, et soit C un convexe quelconque dont l'adhérence est E. Supposons qu'il existe $x \in E$ qui n'est pas dans C, et soit ℓ une forme linéaire qui sépare $\{x\}$ et C. Alors (quitte à changer ℓ en $-\ell$) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C \subseteq \ell^{-1}(]-\infty,\alpha])$, qui est fermé. Donc $\overline{C} \subseteq \ell^{-1}(]-\infty,\alpha])$, et $x \notin \overline{C}$, ce qui contredit l'hypothèse.

En dimension infinie, soit par exemple $E = L^1([0,1])$ muni de sa norme L^1, et $F = C^0([0,1])$. F est un convexe dense dans E. Si $f \in E \setminus F$, alors on ne peut pas séparer f de F, par densité de f.

⋆

Solution 6. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

1. Il y a plusieurs points à vérifier :

- L'application q est bien définie. En effet, pour $x \in E$ et $u \in \mathcal{C}$, on a $p(u(x)) \geq -p(-u(x)) = -p(u(-x))$. Or on peut écrire $u = \sum_{j=1}^N t_j u_j$, où chaque u_j est un produit fini d'éléments de $\mathcal{F}$ (ou l'identité), et $\sum_{j=1}^N t_j = 1$. Donc
$$p(u(x)) \geq -p(u(-x)) \geq -\sum_{j=1}^N t_j p(u_j(-x)) = -\sum_{j=1}^N t_j p(-x) = -p(-x),$$
en utilisant l'invariance de p.
- Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}$. On a $p(u(\lambda x)) = p(\lambda u(x)) = \lambda p(u(x))$, et en prenant l'infimum sur u, on trouve que $q(\lambda x) = \lambda q(x)$.
- La sous-additivité de q est un peu plus délicate. Soient $x, y \in E$, et deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $q(x) = \lim p(u_n(x))$ et $q(y) = \lim q(v_n(y))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et écrivons $u_n = \sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}$, et $v_n = \sum_{j=1}^M s_j v^{(j)}$. Alors $q(x+y) \leq p((u_n \circ v_n)(x+y)) \leq p(v_n \circ u_n(x)) + p(u_n \circ v_n(y))$, où l'on utilise de manière cruciale que $\mathcal{F}$ est commutative. Il suffit maintenant d'observer que
$$p(v_n \circ u_n(x)) \leq \sum_{j=1}^M s_j p(v^{(j)}(u_n(x))) = p(u_n(x)),$$
et de même pour y. Donc $q(x+y) \leq p(u_n(x)) + p(v_n(y))$, et en passant à la limite, on obtient la sous-additivité.

- Le fait que $q \leq p$ se lit sur la définition de q, puisque l'identité est dans $\mathcal{C}$.
- Enfin, si $x \in G$ et $u \in \mathcal{C}$, on écrit $u = \sum_{j=1}^{N} t_j u_j$ comme ci-dessus. Alors

$$p(u(x)) \geq \ell(u(x)) = \ell\left(\sum_{j=1}^{N} t_j u_j(x)\right) = \sum_{j=1}^{N} t_j \ell(u_j(x)) = \sum_{j=1}^{N} t_j \ell(x) = \ell(x),$$

car on peut montrer par récurrence que $\ell(u_j(x)) = \ell(x)$, comme ℓ est $\mathcal{F}$-invariante. Ainsi $\ell \leq q$ sur G.

1. On applique Hahn-Banach à ℓ et q, pour obtenir une forme linéaire sur E, toujours notée ℓ. Il faut montrer qu'elle est $\mathcal{F}$-invariante sur E. Pour cela, prenons $x \in E$ et $u \in \mathcal{F}$, et observons que, par définition de q, $q(x - u(x)) \leq p(a_n(x - u(x)))$, où $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{\circ k} \in \mathcal{C}$. Par conséquent,

$$q(x - u(x)) \leq p\left(\frac{x}{n} - \frac{u^{\circ n}(x)}{n}\right) \leq \frac{2p(x)}{n},$$

où l'on utilise de nouveau l'invariance de p. En passant à la limite, on trouve donc que $q(x - u(x)) \leq 0$. Donc $\ell(x - u(x)) \leq 0$, c'est-à-dire $\ell(x) \leq \ell(u(x))$, pour tout $u \in \mathcal{F}$, et $x \in E$. En répétant le raisonnement avec $u(x) - x$ au lieu de $x - u(x)$, on trouve donc l'autre inégalité, d'où l'invariance de ℓ sur E.

⋆