Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 2

Semi-normes - Théorème de Hahn-Banach (forme analytique)

Séance du 11 février 2019

Solution 1. *Échauffement : espace quotient*

1. Si U est un ouvert de E, alors on voit que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F = \bigcup_{x \in F} (x + U),$$

et comme $x + U$ est ouvert (grâce aux propriétés des espaces vectoriels topologiques), $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert de E. Cela signifie que $\pi(U)$ est un ouvert dans la topologie quotient $\mathcal{T}$ sur E/F. En effet, sinon, la topologie engendrée par $\pi(U)$ et $\mathcal{T}$ serait strictement plus fine que $\mathcal{T}$ et rendrait également continue l'application π. Autrement dit, $\pi(U)$ est ouvert.

2. Soit $[z] = [x] + [y]$ dans E/F (où l'on note $[z]$ la classe de z dans E/F). Soit $\tilde{W}$ un voisinage de $[z]$ dans E/F. Alors $W := \pi^{-1}(\tilde{W})$ est un voisinage de z dans E. Comme $z = (x + f) + y$ pour un certain $f \in F$, et par continuité de l'addition dans E, il existe U (resp. V) un voisinage $x + f$ (resp. y) dans E tels que $U + V \subseteq W$. En notant $\tilde{U} := \pi(U)$ et $\tilde{V} := \pi(V)$, qui sont des voisinages de $\pi(x + f) = [x]$ et $\pi(y) = [y]$ d'après la question précédente, on obtient, grâce à la linéarité de π, que $\tilde{U} + \tilde{V} \subseteq \pi(W) = \tilde{W}$, car pour tout ensemble A, $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$.

De même, si $[z] = \lambda[x]$ et $\tilde{W}$ est un voisinage de $[z]$ dans E/F (que l'on relève en un voisinage W de z dans E), on écrit $z = \lambda(x + f)$, avec $f \in F$. Alors il existe Ω un voisinage de λ dans $\mathbb{R}$ et U un voisinage de $x + f$ dans E tels que $\forall(\mu, y) \in \Omega \times U$, $\mu y \in W$. Donc $(\lambda, [x]) \in \Omega \times \pi(U)$, et $\forall(\mu, [y]) \in \Omega \times \pi(U)$, $\mu[y] \in \pi(W) = \tilde{W}$, d'où la continuité de la somme et du produit par un scalaire.

3. Supposons E/F séparé. Si $x \in E$ et $x \notin F$, $[x]$ vérifie $[x] \neq [0]$. Il existe donc un voisinage de $[x]$ dans E/F qui ne contient pas $[0]$: on le note $\tilde{U}$. Alors $U := \pi^{-1}(\tilde{U})$ est un voisinage de x dans E, et $U \cap F = \emptyset$. Cela prouve que $E \setminus F$ est ouvert, *i.e.* que F est fermé.

Réciproquement, si F est fermé, introduisons l'application continue suivante :

$$\Phi : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x - y. \end{cases}$$

$\Phi^{-1}(F)$ est un fermé de $E \times E$. Si à présent $[x] \neq [y]$ dans E/F, alors $\Phi(x, y) \notin F$, donc il existe un voisinage W de (x, y) dans $E \times E$ tel que $W \subseteq (E \times E) \setminus \Phi^{-1}(F)$. Écrivons $W = U \times V$ où U (resp. V) est un voisinage de x (resp. y) dans E. On a

$$\forall x' \in U, \forall y' \in V, \quad x' - y' \notin F,$$

ce qui signifie bien qu'en considérant $\pi(U)$ et $\pi(V)$, on obtient deux voisinages disjoints de $[x]$ et $[y]$ dans E/F.

⋆

Solution 2. *Espaces localement compacts*

1. On part de la seconde définition et on montre qu'elle implique la première. Soit X un espace topologique est séparé tel que tout point admet un voisinage compact. Soit $x \in X$, et K un voisinage ouvert de x tel que $\overline{K}$ est compact. Soit U un voisinage ouvert de x, on va construire un voisinage ouvert V de x tel que $\overline{V}$ est compact et $\overline{V} \subset U$ en utilisant l'hypothèse de séparation.

Si $\overline{K} \subset U$, il n'y a rien à faire, donc on suppose que ce n'est pas le cas. Pour tout $y \in \overline{K} \setminus U$, par séparation, il existe un voisinage ouvert U_y de y et un voisinage ouvert V_y de x tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $(\overline{K} \setminus U) \subset (\bigcup_{y \in \overline{K} \setminus U} U_y)$ donc par compacité de $\overline{K} \setminus U$, il existe $y_1, \ldots, y_n \in \overline{K} \setminus U$ tels que

$$(\overline{K} \setminus U) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

On pose alors

$$V := K \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

On sait que $V \subset K$ donc $\overline{V} \subset \overline{K}$ est compact. De plus, $V \subset (\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i})^c$, et ce dernier ensemble est un fermé, donc $\overline{V} \subset (\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i})^c \subset (\overline{K} \setminus U)^c$. Comme $\overline{V} \subset \overline{K}$, cela signifie que $\overline{V} \subset U$, et on conclut.

2. Soit E un espace vectoriel topologique localement compact. Soit U un voisinage compact de 0. Alors $\frac{1}{2}U$ est encore un voisinage de 0 par continuité de la multiplication scalaire, et

$$U \subset \bigcup_{x \in U} (x + \frac{1}{2}U).$$

Comme U est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + \frac{1}{2}U),\ x_i \in U.$$

Montrons que $U \subset \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_N)$. Dans ce cas, pour tout x, comme $\frac{x}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on sait que $\frac{x}{n} \in U$ à partir d'un certain rang donc $x \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_N)$.

Soit $y \in U$, alors il existe $i_1 \in [\![1, N]\!]$ et $\varepsilon_1 \in U$ tel que $y = x_{i_1} + \frac{\varepsilon_1}{2}$. En itérant, on construit une suite $(i_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans $[\![1, N]\!]$ et une suite $(\varepsilon_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans U telle que pour tout K,

$$y = S_K + \frac{\varepsilon_K}{2^K} \text{ où } S_K = \sum_{k=1}^{K} \frac{x_{i_k}}{2^{k-1}}.$$

Montrons que U est borné, dans le sens où pour tout voisinage V de 0, il existe $\lambda > 0$ tel que $U \subset \lambda V$. Soit V un voisinage de 0. Pour tout $x \in U$, par continuité de $\lambda \mapsto \lambda x$, il existe $\lambda_x > 0$ tel que $x \in \lambda V$ pour tout $\lambda \geq \lambda_x$. On peut de nouveau extraire un sous-recouvrement fini

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{M} \lambda_{x_i} V,$$

donc $U \subset \lambda V$ où $\lambda = \max\{\lambda_{x_1}, ..., \lambda_{x_M}\}$.

On veut maintenant montrer la convergence de S_k vers y. Soit W un voisinage de 0. Comme l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\to E \\ (\rho, u) &\mapsto \rho.u \end{aligned}$$

est continue, il existe $\eta \in \mathbb{R}$ et V voisinage de 0 dans E tels que $[-\eta, \eta].V \subset W$. Or, comme U est borné, il existe $\lambda > 0$ tel que $U \subset \lambda V$, donc si K est tel que $2^K \geq \frac{\lambda}{\eta}$, alors $\frac{\varepsilon_K}{2^K} \in W$. Comme W est quelconque, on en déduit que donc

$$S_K \to y \text{ quand } K \to +\infty.$$

D'un autre côté, posons

$$S_K^i = \sum_{1 \leq k \leq K, i_k = i} \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ et $K \geq 1$, de sorte que pour tout K, $S_K = \sum_{i=1}^N S_K^i x_i$. Soit S_∞^i la limite des sommes partielles S_K^i. Alors par continuité de l'application $(T^1, ..., T^N) \mapsto \sum_{i=1}^N T^i x_i$, on a $S_K \to \sum_{i=1}^N S_\infty^i x_i$ quand $K \to +\infty$.

Comme l'espace est séparé on a unicité de la limite de la suite S_K. Donc $y = \sum_{i=1}^N S_\infty^i x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_N)$.

3. Comme F est un sous-espace fermé de E, F est un espace de Banach. Pour montrer que $\Phi : f \in F \mapsto f' \in E$ est continue, on va donc pouvoir utiliser le théorème du graphe fermé. Soit donc une suite $(f_n)_n$ d'éléments de F tels que $f_n \to f$ et $\Phi(f_n) = f_n' \to g$ dans E. On veut montrer que $g = f'$. Pour cela, il suffit d'écrire que pour $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt,$$

puis de passer à la limite des deux côtés de l'égalité. Maintenant, comme Φ est linéaire entre deux Banach et que son graphe est fermé, elle est continue.

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in F$, $\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Pour montrer que F est de dimension finie, on va montrer que sa boule unité fermée B est compacte. Pour cela, on utilise le théorème d'Ascoli, dont les trois hypothèses sont vérifiées :

— $[0, 1]$ est bien un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

— Soit $x \in [0, 1]$. Alors, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq 1$ pour tout $f \in B$, donc $\{f(x) \mid f \in B\}$ est relativement compact.

— Enfin, pour tout $f \in B$, $\|f'\|_\infty \leq C$, donc les élements de B sont uniformément lipschitziens (et en particulier, équicontinus).

On conclut grâce à la question précédente.

⋆

Solution 3. *L'espace* $C^k(\Omega)$

1. Pour montrer que cet espace de fonctions est métrisable, il suffit de montrer que l'on peut se contenter d'un nombre dénombrable de semi-normes. Pour ce faire, s'aide d'une suite exhaustive $(K_n)_n$ de compacts de Ω, i.e. une suite de compacts tels que $\bigcup_n K_n = \Omega$ et $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. Pour construire une telle suite, on peut poser

$$K_n = \{x \in \Omega; \|x\| \leq n \text{ et } d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Ensuite, il suffit de considérer les normes

$$\|f\|_n = \sum_{|\alpha| \leq \min\{n,k\}} \|f\|_{\alpha, K_n}.$$

La distance que l'on considère est alors

$$d(f, g) = \sum_n 2^{-n} \min\{\|f - g\|_n, 1\}.$$

Soit $(f_p)_p$ est une suite de Cauchy pour d, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f_p)_p$ est une suite de Cauchy pour $\| . \|_n$. Comme l'espace $\mathcal{C}^{\min\{n,k\}}(K_n)$ est complet pour $\| \cdot \|_n$, on en déduit que $f_p|_{K_n} \to g_n$ dans $\mathcal{C}^{\min\{n,k\}}(K_n)$. Par restriction, on voit alors que $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$, et on note g la fonction telle que $g|_{K_n} = g_n$ (ce qui est possible vu la condition de compatibilité précédente). Alors $g \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, et $\|f_p - g\|_n \to 0$ quand $p \to \infty$: ainsi vu la définition de la distance, $d(f_p, g) \to 0$, et d est une métrique complète.

Remarque : On a utilisé le fait que si K est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors $\mathcal{C}^n(K)$ est complet pour tout $n \in \mathbb{N}$. On le montre par exemple pour $n = 1$. Soit $(f_p)_p$ une suite de Cauchy dans $C^1(K)$. Alors $(f_p)_p$ et $(f_p')_p$ sont de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K)$, donc il existe $f, g \in \mathcal{C}^0(K)$ telles que $f_p \to f$ et $f_p' \to g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, $\|f_p - f_N\|_{\mathcal{C}^0(K)} \leq \varepsilon$ et $\|f_p' - f_N'\|_{\mathcal{C}^0(K)} \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_p(x+h) - f_p(x)}{h} - g(x)\right| \leq \left|\frac{f_p(x+h) - f_N(x+h)}{h} - \frac{f_p(x) - f_N(x)}{h}\right| + \left|\frac{f_N(x+h) - f_N(x)}{h} - f_N'(x)\right| \\ + |f_N'(x) - g(x)|.\end{aligned}$$

Soit δ tel que pour $\|h\| \leq \delta$,

$$\left|\frac{f_N(x+h) - f_N(x)}{h} - f_N'(x)\right| \leq \varepsilon.$$

Alors pour $\|h\| \leq \delta$, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_p(x+h) - f_p(x)}{h} - g(x)\right| &\leq 2\|f_p' - f_N'\|_{\mathcal{C}^0(K)} + 2\varepsilon \\ &\leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Il suffit alors de passer à la limite $p \to +\infty$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \varepsilon$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support dans $K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ (c'est possible : on choisit $x_0 \in \mathring{K}_{N+2} \setminus K_{N+1}$, alors $B(x_0, \varepsilon_0) \subset K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, et une fonction radiale régulière à support dans $B(x_0, \varepsilon_0)$). Alors $f|_{K_N} = 0$ et donc pour $n \leq N$, $\|\lambda f\|_n = 0$. Ainsi,

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|\lambda f\|_n + \sum_{n>N} 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon.$$

3. Soit $\| \cdot \|$ une norme induisant la même topologie. Comme $\{g; \|g\| < 1\}$ est un ouvert et contient 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{g; d(g, 0) < \varepsilon\} \subset \{g; \|g\| < 1\}$. En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| < 1$ et ainsi $\|f\| = 0$, ce qui contredit que f est non nulle.

4. $E = \mathcal{C}_c^0(\Omega)$ est un espace métrisable avec la meme suite de semi-normes que $\mathcal{C}^0(\Omega)$: $\| \cdot \|_{0,K_n}$. On écrit $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^0(K_n)$, où $(K_n)_n$ est une suite exhaustive de compacts pour Ω et $\mathcal{C}^0(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues sur Ω à support dans K_n. Si E était complet, alors d'après le lemme de Baire, il existerait n tel que $\mathcal{C}^0(K_n)$ (qui est un fermé de E) soit d'intérieur vide. On aurait alors l'existence d'une fonction f continue à support dans K_n et un $\varepsilon > 0$ tel que $B(f, \varepsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$. Dans ce cas, $B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$. Par conséquent, pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, il existe α assez petit telle que $\alpha g \in B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ i.e. $\mathrm{Supp}(g) \subset K_n$, ce qui est contradictoire.

5. On se place en dimension 1 et on suppose que $[-\pi - 1, \pi + 1] \subset \Omega$. Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $k = 0$ et posons

$$F = \{g \in \mathcal{C}^0(\Omega); \mathrm{Supp}(g) \subset [-\pi, \pi], \quad \|g\|_{\mathcal{C}^0[-\pi,\pi]} \leq 1\}.$$

F est fermé : si $g_n \in F$ et $g_n \to g$ dans $\mathcal{C}^0(\Omega)$, il y a convergence uniforme sur tout compact, et donc il y a convergence ponctuelle. En particulier $g(x) = 0$ si $x \notin [-\pi, \pi]$ et $g \in F$.

F est borné : en effet, si $g \in F$, g se prolonge à $\bar{\Omega}$ par 0 et $\|g\|_{\mathcal{C}^0(\Omega)} \leq 1$, et donc pour toute semi-norme ρ, $\rho(g) \leq 1$.

Cependant, considérons les $f_n : x \mapsto 1_{x\in[-\pi,\pi]} \sin(nx) \in F$ pour $n \geq 1$. Alors pour $n \neq m$,

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin mx - \sin nx|^2 dx \leq 2\pi \|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}^0[-\pi,\pi]}.$$

On ne peut donc extraire aucune suite de Cauchy de f_n, et donc aucune suite convergente.

Soit maintenant $k > 0$ et

$$F = \{g \in \mathcal{C}^k(\Omega); \mathrm{Supp}(g) \subset [-\pi - 1, \pi + 1], \quad \|g\|_{\mathcal{C}^k[-\pi-1,\pi+1]} \leq 1\}.$$

C'est un fermé borné dans $\mathcal{C}^k(\Omega)$ pour les mêmes raisons que précédemment.

On considère $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\phi|_{|x|\leq\pi} = 1$ et $\phi|_{|x|\geq\pi+1} = 0$. Soit $C_k = \|\phi\|_{\mathcal{C}^k}$. On considère

$$f_n(x) = \frac{1}{2^k C_k n^k} \phi(x) \sin(nx).$$

Par la formule de Leibniz, on vérifie que $f_n \in F$. Cependant, pour $x \in [-\pi, \pi]$, comme $\phi(x) = 1$ et $\phi^{(l)}(x) = 0$ pour $l \geq 1$,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2^k C_k} \sin(nx - k\pi/2).$$

Par le calcul précédent, $\|f_n^{(k)} - f_m^{(k)}\|_{\mathcal{C}^0[-\pi-1,\pi+1]} \geq \frac{1}{2^k C_k}$ (pour $n \neq m$) et donc on ne peut extraire de $(f_n)_n$ aucune sous suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^k([-\pi - 1, \pi + 1])$. F n'est donc pas compact.

6. On dispose d'un suite exhaustive de compacts $(K_n)_n$, et de semi-normes

$$\|f\|_n = \sum_{|\alpha|\leq n} \|\partial^\alpha f\|_{\mathcal{C}^0(K_n)}.$$

Soit donc $(f_k)_k$ une suite bornée de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Pour tout n, soit M_n tel que pour tout k, $\|f_k\|_n \leq M_n$.

Notons tout d'abord que pour tout n et tout $|\alpha| \leq n$, $(\partial^\alpha f_k)_k$ est une famille équicontinue de K_n : en effet d'après le théorème des accroissement finis,

$$|\partial^\alpha f_k(x) - \partial^\alpha f_k(y)| \leq \|\nabla(\partial^\alpha f_k)\|_{\mathcal{C}^0(K_n)} |x - y| \leq dM_{|\alpha|+1}|x - y|,$$

donc $(\partial^\alpha f_k)_k$ est uniformément lipschitzienne. C'est également une famille bornée de $\mathcal{C}^0(K_n)$.

Montrons que pour tout n, on dispose de σ_n et f^n telles que $f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(k)}|_{K_n} \to f^n$ dans $\mathcal{C}^n(K_n)$ (quand $k \to \infty$), et $f^n|_{K_{n-1}} = f^{n-1}$.

On raisonne par récurrence. Tout d'abord, $(f_k)_k$ est bornée, équicontinue de $\mathcal{C}^0(K_0)$ donc par le thèorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite $\sigma_0(k)$ telle que $f_{\sigma_0(k)}|_{K_0} \to f^0$ dans $\mathcal{C}^0(K_0)$.

Par récurrence, on suppose que l'on dispose d'une extraction $\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_{n-1}$ telle que $f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_{n-1}(k)}|_{K_{n-1}} \to f^{n-1}$ dans $\mathcal{C}^{n-1}(K_{n-1})$ quand $k \to \infty$. Alors cette famille est bornée équicontinue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n dans K_n, donc par le thèorème d'Ascoli appliqué à $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_{n-1}(k)})_k$ et ses dérivées, on peut en extraire une sous suite $f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(k)}|_{K_n} \to f^n$ dans $\mathcal{C}^n(K_n)$ lorsque $k \to \infty$. On a alors $f^n|_{K_{n-1}} = f^{n-1}$, ce qui achève la récurrence.

On considère finalement f telle que $f|_{K_n} = f^n$ et $g_k := f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(k)}$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $(g_k)_k$ est extraite de $(f_k)_k$. De plus, pour tout n, $g_k|_{K_n} \to f^n = f|_{K_n}$ dans $\mathcal{C}^n(K_n)$. Ainsi, $g_k \to f$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

⋆

Solution 4. *Autour du théorème de Hahn-Banach analytique*

1. Notons $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées. Si $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, est un élément de E, posons $p(a) := \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Alors, pour $\lambda \geq 0$, on a clairement $p(\lambda a) = \lambda p(a)$, et $p(a+b) \leq p(a) + p(b)$.

Notons $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des suites qui convergent, et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$, $a = \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to+\infty} a_n$. On voit que Λ est une forme linéaire, et $\forall a \in F$, $\Lambda(a) \leq p(a)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger Λ en une forme linéaire sur E notée L, et telle que $\forall a \in \ell^\infty$, $L(a) \leq p(a) = \limsup a_n$. Par ailleurs, $p(-a) = \limsup(-a_n) = -\liminf a_n$, donc $p(-a) \geq L(-a) = -L(a)$ prouve que l'on a, pour tout $a = \{a_n\} \in E$,

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq L(a) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

2. Il est clair que toute suite $(a_k)_k \in \ell^1$ induit une forme linéaire continue sur c_0 via $\varphi_a : (u_k)_k \mapsto \sum_k a_k u_k$. On a $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_{\ell^1}$. À présent, soit $\varphi \in (c_0)^*$. Posons $a_k := \varphi(\delta_k)$, où δ_k est la suite qui vaut 1 en k, et 0 ailleurs. Soit ε_k un signe de a_k de sorte que $\varphi(\varepsilon_k\delta_k) = |a_k|$. Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-M}^{M} |a_k| = \varphi\left(\sum_{k=-M}^{M} \varepsilon_k\delta_k\right) \leq \|\varphi\|.$$

Cela prouve que $a = (a_k)_k \in \ell^1$. Or φ et φ_a coïncident sur c_{00}, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donc ils coïncident aussi sur l'adhérence de c_{00}, c'est-à-dire c_0. Donc $\varphi = \varphi_a$.

Pour construire grâce à Hahn-Banach une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui ne se représente pas à l'aide d'une suite de ℓ^1, on considère ℓ_0 définie pour toute suite v convergente par $\ell_0(v) = \lim v$, et étendue à ℓ^∞ grâce à Hahn-Banach en une forme linéaire ℓ de norme 1. Si ℓ s'identifiait à un $u = (u_n)_n \in \ell^1$ via

$$\ell(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n, \quad v \in \ell^\infty,$$

on aurait $u_n = \ell(\delta_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\|\ell\| = 1$.

⋆

Solution 5. *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn-Banach*

1. Si $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont deux prolongements de ℓ de norme 1, alors leur milieu $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2)$ est de norme supérieure ou égale à 1 (car il prolonge également ℓ, qui est déjà de norme 1 sur F). Par l'inégalité triangulaire, on trouve donc que $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2) \in S$. Comme E^* est strictement convexe, cela implique que $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}_2$, d'où l'unicité du prolongement.

2. Posons $F = \ker(\ell_1 - \ell_2)$ (qui est non réduit à $\{0\}$ par hypothèse), et φ la restriction de ℓ_1 à F. Chacun des ℓ_j constitue bien évidemment un prolongement linéaire continu de φ.

La seule chose à montrer est que l'on a bien $\|\varphi\|_{F^*} = 1$. Pour cela, on va construire une suite $(x_n)_n$ de F telle que $\langle\varphi, x_n\rangle \to 1$ et $\|x_n\|_E \to 1$ quand $n \to \infty$. Comme le milieu de ℓ_1 et ℓ_2 est dans S, on commence par choisir une suite $(y_n)_n$ de E, constituée de vecteurs de norme 1 tels que $\langle\frac{\ell_1+\ell_2}{2}, y_n\rangle \to 1$. Autrement dit, on a

$$\langle\ell_1, y_n\rangle + \langle\ell_2, y_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont de norme 1, chacun des deux termes doit converger vers 1. On choisit alors $u \in E$ tel que $\langle\ell_1 - \ell_2, u\rangle = 1$ et on pose

$$x_n = y_n - \langle\ell_1 - \ell_2, y_n\rangle u,$$

qui vérifie les propriétés souhaitées, car $\|x_n - y_n\|_E \to 0$.

3. Dans ℓ^1, on peut considérer $x = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell^1$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $|\lambda| \leq 1$, $\ell = (1, \lambda, \lambda, \ldots) \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

Dans ℓ^∞, on peut considérer $x = (1, 1, 1, \ldots)$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ell_k : n \mapsto \delta_{k=n} \in \ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

$\star$

Solution 6. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

1. Il y a plusieurs points à vérifier :

— L'application q est bien définie car p est positive.

— Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}$. On a $p(u(\lambda x)) = p(\lambda u(x)) = |\lambda| p(u(x))$, et en prenant l'infimum sur u, on trouve que $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$.

— La sous-additivité de q est un peu plus délicate. Soient $x, y \in E$, et deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $q(x) = \lim p(u_n(x))$ et $q(y) = \lim p(v_n(y))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et écrivons $u_n = \sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}$, et $v_n = \sum_{j=1}^M s_j v^{(j)}$ avec $t_j, s_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N t_j = \sum_{j=1}^M s_j = 1$, et $u^{(j)}, v^{(j)}$ sont des produits finis d'éléments de $\mathcal{F}$. Alors $q(x+y) \leq p((u_n \circ v_n)(x+y)) \leq p(v_n \circ u_n(x)) + p(u_n \circ v_n(y))$ (on a utilisé de manière cruciale que $\mathcal{F}$ est commutative). Il suffit maintenant d'observer que comme les s_j sont positifs de somme 1,

$$p(v_n \circ u_n(x)) \leq \sum_{j=1}^M s_j p(v^{(j)}(u_n(x))) = p(u_n(x)),$$

la dernière égalité provenant de la $\mathcal{F}$-invariance. On procède de même pour y. Donc $q(x+y) \leq p(u_n(x)) + p(v_n(y))$, et en passant à la limite, on obtient la sous-additivité.

— Le fait que $q \leq p$ se lit sur la définition de q, puisque l'identité est dans $\mathcal{C}$.

— Enfin, si $x \in G$ et $u \in \mathcal{C}$, on écrit $u = \sum_{j=1}^N t_j u_j$ comme ci-dessus. Alors

$$p(u(x)) \geq \ell(u(x)) = \ell\left(\sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}(x)\right) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(u^{(j)}(x)) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(x) = \ell(x),$$

car on peut montrer par récurrence que $\ell(u^{(j)}(x)) = \ell(x)$, comme ℓ est $\mathcal{F}$-invariante. Ainsi $\ell \leq q$ sur G.

2. On applique le théorème de Hahn-Banach analytique à ℓ et q, pour obtenir une forme linéaire sur E inférieure ou égale à q donc à p, toujours notée ℓ. Il faut montrer qu'elle est $\mathcal{F}$-invariante sur E. Pour cela, prenons $x \in E$ et $u \in \mathcal{F}$, et observons que, par définition de q, $q(x - u(x)) \leq p(a_n(x - u(x)))$, où $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{\circ k} \in \mathcal{C}$. Par conséquent,

$$q(x - u(x)) \leq p\left(\frac{x}{n} - \frac{u^{\circ n}(x)}{n}\right) \leq \frac{2p(x)}{n},$$

où l'on utilise de nouveau que $p(u(x)) = p(x)$ pour tout x. En passant à la limite, on trouve donc que $q(x - u(x)) \leq 0$. Donc $\ell(x - u(x)) \leq 0$, c'est-à-dire $\ell(x) \leq \ell(u(x))$, pour tout $u \in \mathcal{F}$, et $x \in E$. En répétant le raisonnement avec $u(x) - x$ au lieu de $x - u(x)$, on trouve donc l'autre inégalité, d'où l'invariance de ℓ sur E.

$\star$