Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 2

Semi-normes - Théorème de Hahn-Banach analytique

Séances des 10 et 11 février 2020

Solution 1. *Échauffement : espace quotient*

1. Si U est un ouvert de E, alors on voit que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F = \bigcup_{x \in F} (x + U),$$

et comme $x + U$ est ouvert (grâce aux propriétés des espaces vectoriels topologiques), $\pi^{-1}(\pi(U))$ est un ouvert de E. Cela signifie que $\pi(U) \in \mathcal{T}$ la topologie quotient sur E/F, sans quoi la topologie engendrée par $\pi(U)$ et $\mathcal{T}$ serait strictement plus fine que $\mathcal{T}$ et rendrait également continue l'application π. Autrement dit, $\pi(U)$ est ouvert.

2. Soit $[z] = [x] + [y]$ dans E/F (où l'on note $[z]$ la classe de z dans E/F). Soit $\tilde{W}$ un voisinage de $[z]$ dans E/F. Alors $W := \pi^{-1}(\tilde{W})$ est un voisinage de z dans E. Comme $z = (x + f) + y$ pour un certain $f \in F$, et par continuité de l'addition dans E, il existe U (resp. V) un voisinage $x + f$ (resp. y) dans E tels que $U + V \subseteq W$. En notant $\tilde{U} := \pi(U)$ et $\tilde{V} := \pi(V)$, qui sont des voisinages de $\pi(x + f) = [x]$ et $\pi(y) = [y]$ d'après la question précédente, on obtient, grâce à la linéarité de π, que $\tilde{U} + \tilde{V} \subseteq \pi(W) = \tilde{W}$, car pour tout ensemble A, $\pi(\pi^{-1}(A)) = A$.

De même, si $[z] = \lambda[x]$ et $\tilde{W}$ est un voisinage de $[z]$ dans E/F (que l'on relève en un voisinage W de z dans E), on écrit $z = \lambda(x + f)$, avec $f \in F$. Alors il existe Ω un voisinage de λ dans $\mathbb{R}$ et U un voisinage de $x + f$ dans E tels que $\forall(\mu, y) \in \Omega \times U$, $\mu y \in W$. Donc $(\lambda, [x]) \in \Omega \times \pi(U)$, et $\forall(\mu, [y]) \in \Omega \times \pi(U)$, $\mu[y] \in \pi(W) = \tilde{W}$, d'où la continuité de la somme et du produit par un scalaire.

3. Supposons E/F séparé. Si $x \in E$ et $x \notin F$, $[x]$ vérifie $[x] \neq [0]$. Il existe donc un voisinage de $[x]$ dans E/F qui ne contient pas $[0]$: on le note $\tilde{U}$. Alors $U := \pi^{-1}(\tilde{U})$ est un voisinage de x dans E, et $U \cap F = \emptyset$. Cela prouve que $E \setminus F$ est ouvert, *i.e.* que F est fermé.

Réciproquement, si F est fermé, introduisons l'application continue suivante :

$$\Phi : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x - y. \end{cases}$$

$\Phi^{-1}(F)$ est un fermé de $E \times E$. Si à présent $[x] \neq [y]$ dans E/F, alors $\Phi(x, y) \notin F$, donc il existe un voisinage W de (x, y) dans $E \times E$ tel que $W \subseteq (E \times E) \setminus \Phi^{-1}(F)$. Sans restriction, on peut se ramener à $W = U \times V$ où U (resp. V) est un voisinage de x (resp. y) dans E. On a

$$\forall x' \in U, \forall y' \in V, \quad x' - y' \notin F,$$

ce qui signifie bien qu'en considérant $\pi(U)$ et $\pi(V)$, on obtient deux voisinages disjoints de $[x]$ et $[y]$ dans E/F.

⋆

Solution 2. *L'espace $\mathcal{C}^k(\Omega)$*

1. Pour montrer que cet espace de fonctions est un pré-Fréchet, il suffit de montrer que l'on peut se contenter d'un nombre dénombrable de semi normes. Il est classique qu'il existe une suite croissante K_n de compacts de Ω telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$.

Remarque : On peut même demander que K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1}. Par exemple, on pose

$$K_n = \{x \in \Omega \mid \|x\| \leq n \text{ et } d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}.$$

Ou encore, soit x_n une suite dense dans Ω, et ε_n tel que $B(x_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$ (boule ouverte). Alors la suite

$$K_n = \bigcup_{k \leq n} \bar{B}(x_n, (1 - 1/n)\varepsilon_n)$$

convient.

Ensuite, il suffit de considérer les normes :

$$\|f\|_n = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq \min\{n,k\}} \|f\|_{\alpha, K_n}.$$

On peut se ramener à la distance

$$d(f, g) = \sum_n 2^{-n} \min\{\|f - g\|_n, 1\}.$$

Si f_k est une suite de Cauchy pour d, on a que pour tout n, f_k est une suite de Cauchy pour $\| \,.\, \|_n$: l'espace $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$ étant complet pour $\| \cdot \|_n$, on en déduit que $f_k|_{K_n} \to g_n$ dans $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$. Par restriction, on voit alors que $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$, et on note g la fonction telle que $g|_{K_n} = g_n$ (ce qui est possible vu la condition de compatibilité précédente). Il est alors évident que $g \in C^k(\Omega)$, et que $\|f_k - g\|_n \to 0$ quand $k \to \infty$: ainsi vu la définition de la distance, $d(f_k, g) \to 0$, et d est une métrique complète.

Remarque : Rappelons pourquoi $C^1(K)$ est complet. Si f_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^1(K)$. Alors f_n et f_n' sont de Cauchy dans $C^0(K)$, donc il existe $f, g \in C^0(K)$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $f_n' \longrightarrow g$. Montrons que f est dérivable et $f' = g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que

$$\forall k \geq n, \quad \|f_n - f_k\| + \|f_n' - f_k'\| \leq \varepsilon.$$

On écrit

$$\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\Big| \leq \Big|\frac{(f(x) - f_n(x)) - (f(x+h) - f_n(x+h))}{h}\Big| \\ + \Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| + |f_n'(x) - g(x)|.$$

Soit h tel que

$$\Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| \leq \varepsilon,$$

On écrit, pour $k \geq n$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\Big| \leq & \Big|\frac{(f_k(x) - f_n(x)) - (f_k(x+h) - f_n(x+h))}{h}\Big| \\ & + \Big|\frac{f_k(x+h) - f(x+h)}{h}\Big| + \Big|\frac{f_k(x) - f(x)}{h}\Big| + 2\varepsilon \\ \leq & \|f_k' - f_n'\| + \frac{2}{h}\|f_k - f\| + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

et il suffit alors de choisir k tel que $\|f_k - f\| \leq \frac{\varepsilon}{h}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \varepsilon$, et $f \in C^\infty(\Omega)$ à support dans $K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ (c'est possible : on choisit $x_0 \in \mathring{K}_{N+2} \setminus K_{N+1}$, alors $B(x_0, \varepsilon_0) \subset K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, et une fonction radiale régulière à support dans $B(x_0, \varepsilon_0)$). Alors $f|_{K_N} = 0$ et donc pour $n \leq N$, $\|\lambda f\|_n = 0$. Ainsi,

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \|\lambda f\|_n + \sum_{n>N} 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon.$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme induisant la meme topologie. $\{g \mid \|g\| < 1\}$ est un ouvert et contient 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{g \mid d(g, 0) < \varepsilon\} \subset \{g \mid \|g\| < 1\}$. En particulier, pour tout λ, $\|\lambda f\| < 1$ et ainsi $\|f\| = 0$, ce qui contredit que f est non nulle.

4. $E = C_c^0(\Omega)$ est un espace métrisable avec la même suite de semi-normes que $C^0(\Omega)$: $\|\cdot\|_{0,K_n}$. On écrit $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^0(K_n)$, où $(K_n)_n$ est une suite de compact exhaustive pour Ω et $\mathcal{C}^0(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues à support dans K_n. Alors $\mathcal{C}^0(K_n)$ est un sous-ensemble fermé de E d'intérieur vide. En effet, s'il existe une f continue à support dans K_n et un $\epsilon > 0$ tel que $B(f, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$, alors $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ puis pour tout $g \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, il existe α assez petit telle que $\alpha g \in B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ i.e. $Supp(g) \subset K_n$ ce qui est contradictoire. Donc d'après le lemme de Baire, si E est complet, alors il est vide, ce qui est contradictoire.

5. On se place en dimension 1 et on suppose que $[-\pi, \pi] \subset \Omega$. Considérons tout d'abord que $k = 0$

$$F = \{g \in C^0(\Omega) | \text{Supp}(g) \subset [-\pi, \pi], \quad \|g\|_{C^0[-\pi,\pi]} \leq 1\}.$$

F est fermé : si $g_n \in F$ et $g_n \to g$ dans $C^0(\Omega)$, il y a convergence uniforme sur tout compact, et donc il y a convergence ponctuelle. En particulier $g(x) = 0$ si $x \notin [-\pi, \pi]$ et $g \in F$.

F est borné : en effet, si $g \in F$, g se prolonge à $\bar{\Omega}$ et $\|g\|_{C^0(\Omega)} \leq 1$, et donc pour toute semi norme ρ, $\rho(g) \leq 1$.

Cependant, considérons l'ensemble des $f_n(x) = \mathbb{1}_{x\in[-\pi,\pi]} \sin nx \in F$ $(n \geq 1)$. Alors (pour $n \neq m$)

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin mx - \sin nx|^2 dx \leq 2\pi \|f_n - f_m\|^2_{C^0[-\pi,\pi]}.$$

On ne peut donc extraire aucune suite de Cauchy de f_n, et donc aucune suite convergente.

Soit maintenant $k > 0$ et :

$$F = \{g \in C^k(\Omega) | \text{Supp} g \subset [-\pi, \pi], \quad \|g\|_{C^k[-\pi,\pi]} \leq 1\}.$$

F est fermé borné dans $C^k(\Omega)$ pour les mêmes raisons que précédemment.

On considère ϕ une fonction cut-off C^∞ telle que $\phi|_{[-\pi/2,\pi/2]} = 1$, $\phi|_{|x|\geq\pi} = 0$. Soit $C_k = \|\phi\|_{C^k}$. On considère :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^k C_k n^k} \phi(x) \sin nx,$$

Par la formule de Leibniz, on vérifie que $f_n \in F$. Cependant, pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$D^k f_n(x) = \frac{1}{2^k C_k} \sin(nx - k\pi/2).$$

Avec les mêmes arguments que dans le calcul précédent, on peut montrer que $\|D^k(f_n - f_m)\|^2_{C^0[-\pi,\pi]} \geq \frac{2\pi-2}{(2^k C_k)^2}$ (pour $n \neq m$) et donc on ne peut extraire de f_n aucune sous suite de Cauchy dans $C^k([-\pi, \pi])$. F n'est donc pas compact.

6. On raisonne en dimension 1 pour simplifier. On dispose d'un suite croissante de compacts K_n tels que $\bigcup_n K_n = \Omega$, et de semi normes

$$\|f\|_n = \sum_{\alpha \leq n} \|D^\alpha f\|_{C^0(K_n)}.$$

Soit donc f_k une suite bornée de $C^\infty(\Omega)$: pour tout n, soit M_n tel que pour tout k, $\|f_k\|_n \leq M_n$.

Notons tout d'abord que pour tout α et tout n, $(D^\alpha f_k)_k$ est une famille équicontinue de K_n : en effet par les accroissement finis,

$$|D^\alpha f_k(x) - D^\alpha f_k(y)| \leq \|D^{\alpha+1} f_k\|_{C^0(K_n)} |x-y| \leq M_{\alpha+1}|x-y|.$$

Ainsi, f_n est uniformément lipschitzienne en k, donc équicontinue. C'est également une famille bornée de $C^\alpha(K_n)$.

Montrons que pour tout n, on dispose de σ_n et f_n telles que $f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_n(k)}|_{K_n} \to f^n$ dans $C^n(K_n)$ (quand $k \to \infty$), et $f^n|_{K_{n-1}} = f^{n-1}$.

On raisonne par récurrence. Tout d'abord, f_k est bornée, équicontinue de $C^0(K_0)$ donc par le thèorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite $\sigma_0(k)$ telle que $f_{\sigma_0(k)}|_{K_0} \to f^0$ dans $C^0(K_0)$.

Par récurrence, on suppose que l'on dispose d'une extraction $\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_{n-1}$ telle que $f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_{n-1}(k)}|_{K_{n-1}} \to f^{n-1}$ dans $C^{n-1}(K_{n-1})$ quand $k \to \infty$. Alors cette famille est bornée équicontinue ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre n dans K_n, donc par le thèorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous suite $f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_n(k)}|_{K_n} \to f^n$ dans $C^n(K_n)$ (quand $k \to \infty$) : on a bien sûr que $f^n|_{K_{n-1}} = f^{n-1}$. Ceci achève la récurrence.

On considère finalement f telle que $f|_{K_n} = f^n$ et :

$$g_n = f_{\sigma_0 \circ \dots \circ \sigma_n(n)}.$$

Alors $f \in C^\infty(\Omega)$ et g_n est extraite de f_k. De plus, pour tout l, $g_n|_{K_l} \to f^l = f|_{K_l}$ dans $C^l(K_l)$. Ainsi, $g_n \to f$ dans $C^\infty(\Omega)$.

⋆

Solution 3. *Espaces localement compacts*

1. On part de la seconde définition et on montre qu'elle implique la première. Soit X un espace topologique est séparé tel que tout point admet un voisinage compact. Soit $x \in X$, et K un voisinage compact de x. Soit U un voisinage ouvert de x, on va construire un voisinage V de x tel que $\overline{V}$ est compact et $\overline{V} \subset U$ en utilisant l'hypothèse de séparation.

Si $\overline{K} \subset U$, il n'y a rien à faire, donc on suppose que ce n'est pas le cas. Pour tout $y \in \overline{K} \setminus U$, par séparation, il existe un voisinage ouvert U_y de y et un voisinage ouvert V_y de x tels que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Alors $(\overline{K} \setminus U) \subset (\bigcup_{y \in \overline{K} \setminus U} U_y)$ donc par compacité de $\overline{K} \setminus U$, il existe $y_1, \dots, y_n \in \overline{K} \setminus U$ tels que

$$(\overline{K} \setminus U) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}.$$

On pose alors

$$V := K \cap \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}.$$

On sait que $V \subset K$ donc $\overline{V} \subset \overline{K}$ est compact. De plus, $V \subset (\bigcup_{i=1}^n U_{y_i})^c$, et ce dernier ensemble est un fermé, donc $\overline{V} \subset (\bigcup_{i=1}^n U_{y_i})^c \subset (\overline{K} \setminus U)^c$. Comme $\overline{V} \subset \overline{K}$, cela signifie que $\overline{V} \subset U$, et on conclut.

2. Soit E un espace vectoriel topologique localement compact. Soit U un voisinage compact de 0. Alors $\frac{1}{2}U$ est encore un voisinage de 0 par continuité de la multiplication scalaire, puis

$$U \subset \bigcup_{x \in U} (x + \frac{1}{2}U).$$

Comme U est compact, on peut extraire un sous recouvrement

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + \frac{1}{2}U),\ x_i \in U.$$

Montrons que $U \subset \mathcal{W} = Vect(x_1, ..., x_N)$, ce qui suffirait à conclure puisque U est absorbant.

Soit $y \in U$, alors il existe $i_1 \in \{1, ..., N\}$ et $\epsilon_1 \in U$ tel que $y = x_{i_1} + \frac{\epsilon_1}{2}$. En itérant, on construit une suite $(i_k)_{k \geq 1}$ à valeur dans $\{1, ..., N\}$ et une suite $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ à valeur dans U telle que pour tout K,

$$y = S_K + \frac{\epsilon_K}{2^K} \text{ où } S_K = \sum_{k=1}^{K} \frac{x_{i_k}}{2^{k-1}}.$$

Montrons que U est borné. Soit V un voisinage de 0. Pour tout $x \in U$, par continuité de $\lambda \mapsto \lambda x$, il existe $\lambda_x > 0$ tel que $x \in \lambda V$ pour tout $\lambda \geq \lambda_x$. On peut de nouveau extraire des $x^1, ..., x^m$ tels que

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{m} \lambda_{x^i} V \subset \lambda V,$$

où $\lambda = \max\{\lambda_{x^1}, ..., \lambda_{x^m}\}$.

On veut maintenant montrer la convergence de $(S_K)_K$ vers y. Soit W un voisinage de 0. Comme l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\to E \\ (\rho, u) &\mapsto \rho.u \end{aligned}$$

est continue, il existe $\eta \in \mathbb{R}$ et V voisinage de 0 dans E tels que $[-\eta, \eta].V \subset W$. Or, comme U est borné, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U \subset \lambda V$, donc si K est tel que $2^K \geq \frac{\lambda}{\eta}$, alors $\frac{\epsilon_K}{2^K} \in W$. Comme W est quelconque, on en déduit que donc

$$S_K \to y \text{ quand } K \to +\infty.$$

D'un autre côté, posons

$$S_K^i = \sum_{1 \leq k \leq K, i_k = i} \frac{1}{2^{k-1}}$$

pour tout $i \in \{1, ..., N\}$ et $K \geq 1$, de façon à écrire $S_K = \sum_{i=1}^{N} S_K^i x_i$. Soit S_∞^i les limites des sommes partielles convergentes S_K^i. Alors par continuité de l'application $(T^1, ..., T^N) \mapsto \sum_{i=1}^{N} T^i x_i$, on a $S_K \to \sum_{i=1}^{N} S_\infty^i x_i$ quand $K \to +\infty$.

Comme l'espace est séparé on a unicité de la limite de la suite S_K. Donc $y = \sum_{i=1}^{N} S_\infty^i x_i \in \mathcal{W}$.

3. Comme F est un sous-espace fermé de E, F est un espace de Banach. Pour montrer que $\Phi : f \in F \mapsto f' \in E$ est continue, on va donc pouvoir utiliser le théorème du graphe fermé. Soit donc une suite $\{f_n\}$ d'éléments de F tels que $f_n \to f$ et $\Phi(f_n) = f_n' \to g$ dans E. On veut montrer que $g = f'$. Pour cela, il suffit d'écrire que pour $x \in [0, 1]$,

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t) dt,$$

puis de passer à la limite des deux côtés de l'égalité. Maintenant, comme Φ est linéaire entre deux Banach et que son graphe est fermé, elle est continue.

Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in F$, $\|f'\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$. Pour montrer que F est de dimension finie, on va montrer que sa boule unité fermée B est compacte. Pour cela, on utilise le théorème d'Ascoli, dont les trois hypothèses sont vérifiées :

— $[0, 1]$ est bien un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

— Soit $x \in [0, 1]$. Alors, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq 1$ quelle que soit $f \in B$, donc $\{f(x) \mid f \in B\}$ est relativement compact.

— Enfin, pour tout $f \in B$, $\|f'\|_\infty \leq C$, donc les élements de B sont uniformément lipschitziens (donc en particulier, équicontinus).

On conclut grâce à la question précédente.

⋆

Solution 4. *Autour du théorème de Hahn-Banach analytique*

1. Notons $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites bornées. Si $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, est un élément de E, posons $p(a) := \limsup_{n\to+\infty} a_n$. Alors, pour $\lambda \geq 0$, on a clairement $p(\lambda a) = \lambda p(a)$, et en considérant des valeurs d'adhérence, on voit que $p(a + b) \leq p(a) + p(b)$.

Notons $F \subset E$ le sous-espace vectoriel des suites qui convergent, et $\Lambda : F \to \mathbb{R}$, $a = \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to+\infty} a_n$. On voit que Λ est une forme linéaire, et $\forall a \in F$, $\Lambda(a) \leq p(a)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut donc prolonger Λ en une forme linéaire sur E notée L, et telle que $\forall a \in \ell^\infty$, $L(a) \leq p(a) = \limsup a_n$. Par ailleurs, $p(-a) = \limsup(-a_n) = -\liminf a_n$, donc $p(-a) \geq L(-a) = -L(a)$ prouve que l'on a, pour tout $a = \{a_n\} \in E$,

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n \leq L(a) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n.$$

2. Il est clair que toute suite $\{a_k\} \in \ell^1$ induit une forme linéaire continue sur c_0 via $\varphi_a : \{u_k\} \mapsto \sum_k a_k u_k$. On a $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_{\ell^1}$. À présent, soit $\varphi \in (c_0)^*$. Posons $a_k := \varphi(\delta_k)$, où δ_k est la suite qui vaut 1 en k, et 0 ailleurs. Soit ε_k un signe tel que $\varphi(\varepsilon_k\delta_k) = |a_k|$. Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-M}^{M} |a_k| = \varphi\left(\sum_{k=-M}^{M} \varepsilon_k\delta_k\right) \leq \|\varphi\|.$$

Cela prouve que $a = \{a_k\} \in \ell^1$. Or φ et φ_a coïncident sur c_{00}, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donc ils coïncident aussi sur l'adhérence de c_{00}, c'est-à-dire c_0. Donc $\varphi = \varphi_a$.

Pour construire grâce à Hahn-Banach une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui ne se représente pas à l'aide d'une suite de ℓ^1, on considère ℓ_0 définie pour toute suite v convergente par $\ell_0(v) = \lim v$, et étendue à ℓ^∞ grâce à Hahn-Banach en une forme linéaire ℓ de norme 1. Si ℓ s'identifiait à un $u = \{u_n\} \in \ell^1$ via

$$\ell(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n, \quad v \in \ell^\infty,$$

on aurait $u_n = \ell(\delta_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\ell = 0$, ce qui contredit $\|\ell\| = 1$.

⋆

Solution 5. *Limite de Banach*

1. On a bien sûr $\|\Lambda_n\| \leq 1$. En particulier, pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $(\Lambda_n(u))_n$ est une suite du borné $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$: ainsi p est bien définie. L'homogénéité est immédiate. De plus :

$$p(u + v) = \limsup_n(\Lambda_n(u) + \Lambda_n(v)) \leq \limsup_n \Lambda_n(u) + \limsup_n \Lambda_n(v) = p(u) + p(v).$$

2. Soit $F = \{u \in \ell^\infty | \Lambda_n(u) \text{ admet une limite}\}$ l'ensemble des suite Cesarò-convergentes. On définit Λ sur F par

$$\Lambda(u) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(u)$$

On a bien sûr que $\Lambda(u) = p(u)$ sur F. Grâce au théorème de prolongement de Hahn-Banach, on peut étendre Λ à ℓ^∞ en une forme linéaire vérifiant pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$,

$$\Lambda(u) \leq p(u).$$

On voit alors que pour tout $u \in \ell^{\infty(\mathbb{N})}$, en raisonnant avec u et $-u$,

$$\liminf_{n\to+\infty} \Lambda_n(u) \leq \Lambda u \leq \limsup_{n\to+\infty} \Lambda_n(u).$$

On montre que $\limsup_n \Lambda_n(u) \leq \limsup_n u_n$. Fixons $N \geq 0$. Alors pour $n \geq N$,

$$\Lambda_n(u) = \frac{u_0 + \cdots + u_N}{n+1} + \frac{u_{N+1} + \cdots + u_n}{n}$$

et $\frac{u_0+\cdots+u_N}{n+1} \to 0$ donc

$$\limsup_n \Lambda_n(u) \leq \sup_{n>N} u_n.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\limsup_n \Lambda_n(u) \leq \limsup_N u_N.$$

De même

$$\liminf_n \Lambda_n(u) \geq \liminf_N u_N.$$

De plus :

$$\Lambda_n(S_g u - u) = \frac{u_{n+1} - u_0}{n+1} \to 0$$

donc $\Lambda(S_g u - u) = 0$ et $\Lambda S_g u = \Lambda u$.

3. Non, bien entendu. Notre construction définit Λ de manière unique sur F qui est fermé. On considère la suite u définie par $u_n = 1$ si n est dans un intervalle $[\![2^{2k}+1, 2^{2k+1}]\!]$ (de longueur 2^{2k}) pour un entier k, $u_n = 0$ sinon. On voit que

$$\Lambda_{2^{2k}}(u) = \frac{1}{2^{2k}+1}(2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \cdots + 1) = \frac{2^{2k-2}}{2^{2k}+1}(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \cdots + 2^{-2k+2}) \to \frac{1}{3}$$

et

$$\Lambda_{2^{2k+1}}(u) = \frac{1}{2^{2k+1}+1}(2^{2k} + 2^{2k-2} + \cdots + 1) = \frac{2^{2k}}{2^{2k+1}+1}(1 + 2^{-2} + \cdots + 2^{-2k}) \to \frac{2}{3}$$

lorsque k tend vers $+\infty$, donc $\liminf \Lambda_n(u) \leq \frac{1}{3}$ et $\limsup \Lambda_n(u) \geq \frac{2}{3}$. En choisissant $\Lambda(u) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ arbitrairement, et en étendant Λ à partir de $\mathbb{R}u \oplus F$ par Hahn-Banach, on obtient une infinité de limites de Banach différentes.

⋆

Solution 6. *Théorème de Hahn-Banach invariant*

1. Il y a plusieurs points à vérifier :

- L'application q est bien définie. De plus, le fait que $q \leq p$ se lit sur la définition de q, puisque l'identité est dans $\mathcal{C}$.

- Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{C}$. On a $p(u(\lambda x)) = p(\lambda u(x)) = |\lambda| p(u(x))$, et en prenant l'infimum sur u, on trouve que $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$.
- La sous-additivité de q est un peu plus délicate. Soient $x, y \in E$, et deux suites $\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $q(x) = \lim p(u_n(x))$ et $q(y) = \lim p(v_n(y))$. Fixons $n \in \mathbb{N}$, et écrivons $u_n = \sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}$, et $v_n = \sum_{j=1}^M s_j v^{(j)}$, où chaque $u^{(j)}$ et $v^{(j)}$ est un produit fini d'éléments de $\mathcal{F}$ (ou l'identité). Alors $q(x+y) \leq p((u_n \circ v_n)(x+y)) \leq p(v_n \circ u_n(x)) + p(u_n \circ v_n(y))$, où l'on utilise de manière cruciale que $\mathcal{F}$ est commutative. Il suffit maintenant d'observer que

$$p(v_n \circ u_n(x)) \leq \sum_{j=1}^M s_j p(v^{(j)}(u_n(x))) = p(u_n(x)),$$

  et de même pour y. Donc $q(x+y) \leq p(u_n(x)) + p(v_n(y))$, et en passant à la limite, on obtient la sous-additivité.
- Enfin, si $x \in G$ et $u \in \mathcal{C}$, on écrit $u = \sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}$ comme ci-dessus. Alors

$$p(u(x)) \geq \ell(u(x)) = \ell\left(\sum_{j=1}^N t_j u^{(j)}(x)\right) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(u^{(j)}(x)) = \sum_{j=1}^N t_j \ell(x) = \ell(x),$$

  car on peut montrer par récurrence que $\ell(u_j(x)) = \ell(x)$, comme ℓ est $\mathcal{F}$-invariante. Ainsi $\ell \leq q$ sur G.

2. On applique Hahn-Banach à ℓ et q, pour obtenir une forme linéaire sur E, toujours notée ℓ, qui vérifie de plus $\ell \leq q$.

Il faut montrer qu'elle est $\mathcal{F}$-invariante sur E. Pour cela, prenons $x \in E$ et $u \in \mathcal{F}$, et observons que, par définition de q, $q(x - u(x)) \leq p(a_n(x - u(x)))$, où $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{\circ k} \in \mathcal{C}$. Par conséquent,

$$q(x - u(x)) \leq p\left(\frac{x}{n} - \frac{u^{\circ n}(x)}{n}\right) \leq \frac{2p(x)}{n},$$

où l'on utilise de nouveau l'invariance de p. En passant à la limite, on trouve donc que $q(x - u(x)) \leq 0$. Donc $\ell(x - u(x)) \leq 0$, c'est-à-dire $\ell(x) \leq \ell(u(x))$, pour tout $u \in \mathcal{F}$, et $x \in E$. En répétant le raisonnement avec $u(x) - x$ au lieu de $x - u(x)$, on trouve donc l'autre inégalité, d'où l'invariance de ℓ sur E.

$\star$

Solution 7. *Unicité du prolongement dans le théorème de Hahn-Banach*

1. Si $\tilde{\ell}_1$ et $\tilde{\ell}_2$ sont deux prolongements de ℓ de norme 1, alors leur milieu $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2)$ est de norme supérieure ou égale à 1 (car il prolonge également ℓ, qui est déjà de norme 1 sur F). Par l'inégalité triangulaire, on trouve donc que $\frac{1}{2}(\tilde{\ell}_1 + \tilde{\ell}_2) \in S$. Comme E^* est strictement convexe, cela implique que $\tilde{\ell}_1 = \tilde{\ell}_2$, d'où l'unicité du prolongement.

2. Posons $F = \ker(\ell_1 - \ell_2)$ (qui est non réduit à $\{0\}$ par hypothèse), et φ la restriction de ℓ_1 à F. Chacun des ℓ_j constitue bien évidemment un prolongement linéaire continu de φ.

La seule chose à montrer est que l'on a bien $\|\varphi\|_{F^*} = 1$. Pour cela, on va construire une suite $\{x_n\}$ de F telle que $\langle \varphi, x_n \rangle \to 1$ et $\|x_n\|_E \to 1$ quand $n \to \infty$. Comme le milieu de ℓ_1 et ℓ_2 est dans S, on commence par choisir une suite $\{y_n\}$ de E, constituée de vecteurs de norme 1 tels que $\langle \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}, y_n \rangle \to 1$. Autrement dit, on a

$$\langle \ell_1, y_n \rangle + \langle \ell_2, y_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2.$$

Comme ℓ_1 et ℓ_2 sont de norme 1, chacun des deux termes doit converger vers 1. On choisit alors $u \in E$ tel que $\langle \ell_1 - \ell_2, u \rangle = 1$ et on pose

$$x_n = y_n - \langle \ell_1 - \ell_2, y_n \rangle u,$$

qui vérifie les propriétés souhaitées, car $\|x_n - y_n\|_E \to 0$.

3. Dans ℓ^1, on peut considérer $x = (1, 0, 0, \dots) \in \ell^1$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $|\lambda| \leq 1$, $\ell = (1, \lambda, \lambda, \dots) \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

Dans ℓ^∞, on peut considérer $x = (1, 1, 1, \dots)$, et on regarde f linéaire définie sur $\mathbb{R}x$ par $f(x) = 1$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ell_k : n \mapsto \delta_{k=n} \in \ell^1 \subset (\ell^\infty)^*$ est un prolongement linéaire de f, continu et de norme 1.

⋆

Solution 8. *Espaces L^p, $p \in]0, 1[$*

1. Pour $x, y \geq 0$, on vérifie grâce au lemme des pentes appliqué à la fonction concave $x \mapsto x^p$ que $(x + y)^p \leq x^p + y^p$, car $\frac{(x+y)^p - y^p}{x^p} \leq \frac{x^p - 0}{x^p}$. Soient $u, v, w \in \ell^p(\mathbb{N})$. On en déduit que

$$d(f, g) \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \int_0^1 (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx < +\infty,$$

donc d est bien définie. D'autre part, d est bien sûr symétrique et définie, et enfin, si $f, g, h \in L^p([0, 1])$, alors $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$ par sous-additivité de $x \mapsto x^p$.

2.

(a) La régularité de la mesure de Lebesgue permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x |f|^p$ est continue, croissante, vaut 0 en 0 et $\int_0^1 |f|^p$ en 1. Il suffit donc de choisir x_j tel que $F(x_j) = \frac{j}{n-1} \int_0^1 |f|^p$.

(b) On a bien sûr

$$f = \frac{1}{n}(g_0^n + \dots + g_{n-1}^n).$$

D'autre part, $\int_0^1 |g_j^n|^p = n^p \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \to 0$ uniformément en $j \in [\![0, n-1]\!]$. Pour n assez grand, il vient que $\forall j, \;\; g_j^n \in V$, puis par convexité, $f \in V$. Cela prouve que $V = L^p([0, 1])$.

3. Soit $\ell \in L^p([0, 1])^*$. Par continuité et linéarité, $\ell^{-1}(] - 1, 1[)$ est un voisinage ouvert convexe de 0 : c'est donc $L^p([0, 1])$ tout entier. Cela prouve que ℓ est uniformément bornée sur $L^p([0, 1])$, et comme $\ell(\lambda f) = \lambda f$ pour λ réel et f dans $L^p([0, 1])$, cela entraîne que $\ell = 0$.

⋆

Solution 9. *Espaces ℓ^p, $p \in]0, 1[$*

1. Pour $x, y \geq 0$, on vérifie grâce au lemme des pentes appliqué à la fonction concave $x \mapsto x^p$ que $(x + y)^p \leq x^p + y^p$, car $\frac{(x+y)^p - y^p}{x^p} \leq \frac{x^p - 0}{x^p}$. Soient $u, v, w \in \ell^p(\mathbb{N})$. On en déduit que pour tout n, $|u_n - w_n|^p \leq |u_n - v_n|^p + |v_n - w_n|^p$ et donc $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$. La positivité et la symétrie sont immédiates : d est une distance. Pour la complétude, on raisonne comme dans le cas $p \geq 1$ au moyen de suites de Cauchy.

2. Comme $d(0, u^k) = (1 + k)^{pq}$ et $pq \in]p - 1, 0[$, $u^k \to 0$. Comme K est formé d'une suite et de sa limite, il est compact. Considérons l'isobarycentre v^k de $u^0, \cdots, u^k$

$$v^k = \frac{u^0 + \cdots + u^k}{k + 1} = \left(\frac{(1 + n)^q}{(1 + k)} \mathbb{1}_{n \leq k} \right)_n.$$

Alors v^k appartient à l'enveloppe convexe de K et

$$d(v^k, 0) = \sum_{n=0}^k \left(\frac{(1 + n)^q}{(1 + k)} \right)^p \sim \frac{1}{1 + pq}(1 + k)^{1+pq-p}.$$

Mais $q > 1 - 1/p$ donc $1 + pq - p > 0$ et $d(0, v^k) \to \infty$.

Si $(\ell^p(\mathbb{N}), d)$ était localement convexe, il existerait un voisinage convexe $V \subset B_f(0,1)$. V contiendrait alors tous les u^k pour k assez grand, et par convexité, tous les $w^k = \frac{1}{k+1}(u^k + \cdots + u^{2k})$, pour k assez grand. En reprenant le même calcul, on voit que $w^k \notin B_f(0,1)$ si k est assez grand : par comparaison série-intégrale,

$$d(w^k, 0) = \sum_{n=k}^{2k} \left(\frac{(1+n)^q}{(1+k)} \right)^p \geq \frac{1}{1+pq} \frac{(1+2k)^{1+pq} - k^{1+pq}}{(1+k)^p} \to +\infty.$$

3. L'espace $(\ell^p(\mathbb{N}))^*$ est muni de la distance

$$d'(\ell, \ell') = \sup_{\substack{u \in \ell^p(\mathbb{N}) \\ d(0,u) \leq 1}} |\ell(u) - \ell'(u)|.$$

On a $\ell^\infty(\mathbb{N}) \hookrightarrow (\ell^p)^*$. En effet, soit $(u_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\ell_u : v \in \ell^p(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$. Soit $v \in \ell^p(\mathbb{N})$ de norme 1. Alors $|v_n| < 1$ pour tout n donc $|v_n| < |v_n|^p$ et

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n \right| \leq \|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|^p \right),$$

ce qui assure la continuité de ℓ_u.

Réciproquement, soit $\ell \in (\ell^p(\mathbb{N}))^*$. On définit u par $u_n = \ell(\delta_n)$. Si par l'absurde il existait une extraction $(n_k)_k$ telle que $|u_{n_k}| \to +\infty$, alors $1 = \ell(\delta_{n_k}/u_{n_k})$ alors que $\delta_{n_k}/u_{n_k} \to 0$, donc ℓ ne serait pas continue. Ainsi, $u_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Enfin, si $\ell = \ell_v$ et $\ell' = \ell_{v'}$, on peut montrer que

$$d'(\ell, \ell') = \sup_{\substack{u \in \ell^p(\mathbb{N}) \\ d(0,u) \leq 1}} \left| \sum_n (v_n - v'_n) u_n \right| = \sup_n |v_n - v'_n|.$$

L'isomorphisme $v \mapsto \ell_v$ est donc bicontinu.

$\star$