Indications pour le Td n° 2 d'EDP

Autour du front d'onde

Séance du 10 octobre 2014

Solution 1. *Propagation des singularités pour l'équation des ondes*

1. En prenant la transformée de Fourier de l'équation par rapport à la variable x, on obtient

$$\partial_t^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} = 0,$$

et donc on résoud

$$\hat{u} = e^{it|\xi|} f_1(\xi) + e^{-it|\xi|} f_2(\xi),$$

et f_1 et f_2 sont déterrminés par les données initiales. On obtient

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|} \hat{f}(\xi).$$

On voit donc que $\hat{u}$ est à décroissance rapide dans les directions où $\hat{f}$ est à décroissance rapide, et que si $f \in C^\infty$ alors $u \in C^\infty$.

2. Comme $\int (1-\chi(\xi)) \frac{\sin(t\xi)}{|\xi|} e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi)$ est à support compact,

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int (1-\chi(\xi)) \frac{\sin(t\xi)}{|\xi|} e^{ix.\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

est C^∞.

3. $\hat{f}$ est à décroissance rapide sur le support de fr $1-\Psi$ donc $u_+^2 \in C^\infty$.

4. En On écrit

$$u_+^1(t,x) = \int \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right|^2} \partial_j e^{i((x-y).\xi + t|\xi|)} d\xi,$$

Sur le support de ψ le dénominateur ne s'annule pas pour $x \in U$ et $y \in supp(f)$. On a

$$\left| \partial_x^l \partial_\xi^k \left(\frac{x_j - y_j + t\frac{\xi_j}{|\xi|}}{i\left|x - y + t\frac{\xi}{|\xi|}\right|} \frac{\psi(\xi)\chi(\xi)}{|\xi|} \right) \right| \leq C(1+|\xi|)^{-k},$$

donc on peut dériver $k-n$ fois sous l'intégrale. u_+^1 est donc C^∞. On a montré

$$singsupp(u_+(t)) \subset supp(f) - t\Sigma_1(f).$$

De même on a

$$singsupp(u_-(t)) \subset supp(f) + t\Sigma_1(f).$$

5. Soit $x_0 \notin \cup_{(x,\xi)\in WF(f)} \left(x \pm t\frac{\xi}{|\xi|}\right)$. Soit $y \in singsupp(f)$. Alors

$$x_0 \neq y - t\Sigma_y \cap \{|\xi| = 1\},$$

donc il existe un voisinage U_y de y tel que pour toute $\phi \in \mathcal{D}(U_y)$ telle que $\phi(y) = 1$ on ait

$$x_0 \notin U_y - t\Sigma(\phi f).$$

$singsupp(f)$ étant compact, il existe un nombre fini de y tel que $singsupp(f)$ soit recouvert par les U_{y_i}. On introduit une décomposition de l'unité ϕ_i telle que les ϕ_i sont à support dans les U_{y_i} et $\sum \phi_i = 1$ sur un voisinage de $suppsing(f)$. On décompose

$$f = \sum \phi_i f + \widetilde{f},$$

avec $\widetilde{f} \in C_c^\infty$, et on considère u_i solution de $\Box u_i = 0$ avec la donnée initiale $\phi_i f$ et $\widetilde{u}$ avec la donnée initiale $\widetilde{f}$. Alors

$$u = \sum u_i + \widetilde{u},$$

avec $\widetilde{u} \in C^\infty$. Comme $x_0 \notin U_{y_i} - t\Sigma(\phi_i f)$, d'après la question précédente, $x_0 \notin singsupp((u_i)_+)$. De même $x_0 \notin singsupp((u_i)_-)$, donc pour tout i on a $x_0 \notin singsupp(u_i)$, donc $x_0 \notin singsupp(u)$.

⋆

Solution 2. *Transformée FBI et analyticité*

1. On a

$$P^t u(\xi, x) = \mathcal{F}(e^{-\pi t(x-y)^2} f(y))(\xi),$$

donc comme la transformée de Fourier est une isomètrie sur L^2 on a

$$\|P^t u(\xi, x)\|_{L^2_\xi} = \|e^{-\pi t(x-y)^2} f(y)\|_{L^2_y},$$

et donc

$$\int |P^t u(\xi, x)|^2 d\xi dx = \int e^{-2\pi t(x-y)^2} f(y)^2 dx dy = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{L^2}.$$

Comme $t^{\frac{1}{4}} T$ est une isomètrie, son inverse est donné par $t^{\frac{1}{4}} T^*$, ce qui permet d'obtenir une formule de représentation.

2. Soit h une fonction C_c^∞ telle que $h = 0$ sur $B(x_0, \delta)$. On a alors

$$|P^t h(t\xi, x)| \leq \|h\|_{L^\infty} \int_{|y| \geq \delta} e^{-\pi t y^2} dy \leq C e^{-\varepsilon t}$$

pour des constantes ε et C bien choisies.

3. Si f est analytique au voisinage de x_0, on peut prolonger f en une fonction holomorphe sur $[x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta] + i[-2\delta, 2\delta]$. Grâce au théorème de Cauchy, on peut alors remplacer l'intégrale sur $y \in \mathbb{R}$ par une intégrale sur le chemin $y + i\delta\chi(y)$ où χ est à support dans $]x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta[$ et vaut 1 sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ on obtient la formule voulue.

4. On obtient donc

$$|P^t u(t\xi, x)| \leq C \sup_y \exp\left(t\left(-2\delta|\xi|\chi(y) - \pi(x-y)^2 + \pi\delta^2\chi(y)^2\right)\right)$$

On prend $|\xi| \geq \delta$. Si $y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ alors

$$|P^t u(t\xi, x)| \leq C \exp(-2\delta^2 t).$$

Sinon, $|y-x_0| \geq \delta$, donc si $|x-x_0| \leq \frac{\delta}{2}$, on a $|x-y| \geq \frac{\delta^2}{4}$ et donc

$$|P^t u(t\xi, x)| \leq C \exp\left(-\pi \frac{\delta^2}{4} t\right).$$

5. Pour tout $x \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}
&\int e^{2\pi i x\xi - 2\pi a x^2 |\xi|}(1 + iaxsgn(\xi))d\xi \\
&= (1-iax)\int_{-\infty}^{0} e^{2\pi i x\xi + 2\pi a x^2 \xi} d\xi + (1+iax)\int_0^{\infty} e^{2\pi i x\xi - 2\pi a x^2 \xi} d\xi \\
&= (1-iax)\left[\frac{e^{2\pi i x\xi + 2\pi a x^2}}{2\pi i x + 2\pi a x^2 \xi}\right]_{-\infty}^{0} + (1+iax)\left[\frac{e^{2\pi i x\xi - 2\pi a x^2 \xi}}{2\pi i x + 2\pi a x^2}\right]_0^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc D est supportée en 0. D peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire finie de $\delta^{(n)}$. Si f à support compact s'annule jusqu'à l'ordre 2 en 0, on a alors

$$\int\int |f(x)| e^{-2\pi a x^2 |\xi|} |1 + axsgn(\xi)| dx d\xi \leq \int |f(x)| \frac{1}{\pi a x^2}(1 + |ax|)dx < \infty,$$

donc on peut appliquer le théorème de Fubbini et inverser les intégrales. D'après le calcul précédent,

$$< D, f >= 0.$$

D est donc d'ordre au plus 1. Si maintenant f s'annule jusqu'à l'odre 1, on peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec f_1 impaire et f_2 qui s'annule jusqu'à l'ordre 2 en 0. On a alors

$$< D, f >=< D, f_1 >= 0.$$

On peut donc écrire $D = c\delta$, et on calcule $c = 1$.

6. On pose

$$h_1 = e^{-\pi \frac{t}{2}(x-y)^2} f, \quad h_2 = e^{-\pi \frac{t}{2}(x-y)^2} g.$$

On a alors

$$\widehat{h_1} = P^{\frac{t}{2}} f(\xi, x), \quad \widehat{h_2} = P^{\frac{t}{2}} g(\xi, x),$$

et

$$h_1(y) h_2(y) = e^{-\pi t (y-x)^2} f(y) g(y),$$

donc

$$P^t(fg)(x, t\xi) = \widehat{h_1 h_2}(t\xi) = \int P^{\frac{t}{2}} f(t\xi - \eta, x) P^{\frac{t}{2}} g(\eta, x) d\eta.$$

7. On découpe l'intégrale précédente en $I_1 + I_2$, ou pour I_1 on intègre sur $|\eta| \leq \frac{t}{2}|\xi|$ et pour I_2 on intègre sur $|\eta| \geq \frac{t}{2}|\xi|$. Si $|\eta| \leq \frac{t}{2}|\xi|$, on a $|\xi - \frac{\eta}{t}| \geq \frac{|\xi|}{2}$, donc

$$|P^{\frac{t}{2}} f(t\xi - \eta, x)| = |P^{\frac{t}{2}} f(\frac{t}{2}(2\xi - 2\frac{\eta}{t}), x)| \leq C e^{-\epsilon \frac{t}{2}}$$

et

$$|I_1| \leq C e^{-\varepsilon \frac{t}{2}} \int |\widehat{h_2}| \leq C'(1 + t^2) e^{-\varepsilon \frac{t}{2}}.$$

Si $|\eta| \geq \frac{t}{2}|\xi|$ on a de même

$$|P^{\frac{t}{2}}(\eta, x)| = |P^{\frac{t}{2}}(\frac{t}{2}\frac{2\eta}{t}, x)| \leq Ce^{-\varepsilon\frac{t}{2}}.$$

8. On peut écrire

$$f(x) = \int e^{2\pi i(x-y)\xi - 2\pi a(x-y)^2|\xi|}(1 + ia(x-y)sgn(\xi))f(y)dyd\xi.$$

On veut prolonger holomorphiquement cette fonction au voisinage de 0. Pour $z = x + iv$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int e^{2\pi i(z-y)\xi - 2\pi a(z-y)^2|\xi|}(1 + ia(z-y)sgn(\xi))f(y)dy \\
=&e^{2\pi iz\xi - 4\pi iaxv|\xi| + 2\pi av^2|\xi|}\int e^{-2\pi iy\xi + 4\pi avyi|\xi| - 2\pi a|\xi|(x-y)^2}(1 + a(z-y)sgn(\xi))f(y)dy \\
=&e^{2\pi iz\xi - 4\pi iaxv|\xi| + 2\pi av^2|\xi|}\Big((1 + azsgn(\xi)P^{2a|\xi|}f(\xi - 2av|\xi|, x) - iasgn(\xi)P^{2a|\xi|}h(\xi - 2av|\xi|, x)\Big),
\end{aligned}$$

pù $h = yf$. D'après la question précédente, h vérifie aussi $A(x_0)$ et il existe donc K, C, ε tels que pour $|\xi| \geq K$ et x au voisinage de x_0

$$|P^t f(t\xi, x)| \leq Ce^{-\varepsilon t}, \quad |P^t h(t\xi, x)| \leq Ce^{-\varepsilon t},$$

Pour $|v| \leq 1$ et $a \leq \frac{1}{4K}$ on obtient donc

$$\begin{aligned}
&\left|e^{2\pi iz\xi - 4\pi iaxv|\xi| + 2\pi av^2|\xi|}\Big((1 + azsgn(\xi)P^{2a|\xi|}f(\xi - 2av|\xi|, x) - iasgn(\xi)P^{2a|\xi|}h(\xi - 2av|\xi|, x)\Big)\right| \\
&\leq C'e^{-2\pi v\xi + 2\pi av^2 - \varepsilon a|\xi|}.
\end{aligned}$$

Pour v assez petit, et x proche de x_0, le prolongement holomorphe est donc bien défini.

⋆