Correction du Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

Distributions

Séance du 3 mars 2013

Solution 1. *L'espace* $\mathcal{C}^k(\Omega)$

1. Pour montrer que cet espace de fonctions est métrisable, il suffit de montrer que l'on peut se contenter d'un nombre dénombrable de semi normes. Il est classique qu'il existe une suite croissante K_n de compact de Ω telle que $\bigcup_n K_n = \Omega$ (on peut meme demander que K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} : par exemple, soit x_n une suite dense dans Ω, et ε_n tel que $B(x_n, \varepsilon_n) \subset \Omega$ (boule ouverte). Alors la suite

$$K_n = \bigcup_{k \leq n} \bar{B}(x_n, (1 - 1/n)\varepsilon_n)$$

convient). Ensuite, il suffit de considérer les normes :

$$\|f\|_n = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq \min\{n,k\}} \|f\|_{\alpha, K_n}.$$

La distance que l'on considère est alors

$$d(f,g) = \sum_n 2^{-n} \min\{\|f-g\|_n, 1\}.$$

Si f_k est une suite de Cauchy pour d, on a que pour tout n, f_k est une suite de Cauchy pour $\| \,.\, \|_n$: l'espace $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$ étant complet pour $\| \cdot \|_n$, on en déduit que $f_k|_{K_n} \to g_n$ dans $C^{\min\{n,k\}}(K_n)$. Par restriction, on voit alors que $g_{n+1}|_{K_n} = g_n$, et on note g la fonction telle que $g|_{K_n} = g_n$ (ce qui est possible vu la condition de compatibilité précédente). Il est alors évident que $g \in C^k(\Omega)$, et que $\|f_k - g\|_n \to 0$ quand $k \to \infty$: ainsi vu la définition de la distance, $d(f_k, g) \to 0$, et d est une métrique complète.

Remarque : Si f_n est de Cauchy dans $\mathcal{C}^1(K)$. Alors f_n et f_n' sont de Cauchy dans $C^0(K)$, donc il existe $f, g \in C^0(K)$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $f_n' \longrightarrow g$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que

$$\forall k \geq n, \quad \|f_n - f_k\| + \|f_n' - f_k'\| \leq \varepsilon.$$

On écrit

$$\Big|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\Big| \leq \Big|\frac{((f(x) - f_n(x)) - (f(x+h) - f_n(x+h))}{h}\Big| + \Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| + |f_n'(x) - g(x)|.$$

Soit h tel que

$$\Big|\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x)\Big| \leq \varepsilon,$$

On écrit, pour $k \geq n$

$$\begin{aligned}\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\Big| \leq & \Big|\frac{((f_k(x)-f_n(x))-(f_k(x+h)-f_n(x+h))}{h}\Big| \\ & +\Big|\frac{f_k(x+h)-f(x+h)}{h}\Big|+\Big|\frac{f_k(x)-f(x)}{h}\Big|+2\varepsilon \\ \leq & \|f'_k-f'_n\|+\frac{2}{h}\|f_k-f\|+2\varepsilon,\end{aligned}$$

et il suffit alors de choisir k tel que $\|f_k - f\| \leq \frac{\varepsilon}{h}$.

2. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \varepsilon$, et $f \in C^\infty(\Omega)$ à support dans $K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ (c'est possible : on choisit $x_0 \in \mathring{K}_{N+2} \setminus K_{N+1}$, alors $B(x_0, \varepsilon_0) \subset K_{N+2} \setminus \mathring{K}_{N+1}$ pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, et une fonction radiale régulière à support dans $B(x_0, \varepsilon_0)$). Alors $f|_{K_N} = 0$ et donc pour $n \leq N$, $\|\lambda f\|_n = 0$. Ainsi,

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\|\lambda f\|_n + \sum_{n>N} 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon.$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme induisant la meme topologie. $\{g | \|g\| < 1\}$ est un ouvert et contient 0, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{g | d(g,0) < \varepsilon\} \subset \{g | \|g\| < 1\}$. En particulier, pour tout λ, $\|\lambda f\| < 1$ et ainsi $\|f\| = 0$, ce qui contredit que f est non nulle.

4. $E = C^0_c(\Omega)$ est un espace métrisable avec la meme suite de semi-normes que $C^0(\Omega)$: $\|\cdot\|_{0,K_n}$. On écrit $E = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}^0(K_n)$, où $(K_n)_n$ est une suite de compact exhaustive pour Ω et $\mathcal{C}^0(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues à support dans K_n. Alors $\mathcal{C}^0(K_n)$ est un sous-ensemble fermé de E d'intérieur vide. En effet, s'il existe une f continue à support dans K_n et un $\epsilon > 0$ tel que $B(f, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$, alors $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ puis pour tout $g \in \mathcal{C}^0_c(\Omega)$, il existe α assez petit telle que $\alpha g \in B(0, \epsilon) \subset \mathcal{C}^0(K_n)$ i.e. $Supp(g) \subset K_n$ ce qui est contradictoire. Donc d'après le lemme de Baire, si E est complet, alors il est vide, ce qui est contradictoire.

⋆

Solution 2. *Partition de l'unité et fonction plateau*

1. Considérons $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On vérifie par récurrence que pour $|x| < 1$

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}e^{-\frac{1}{1-x^2}},$$

où P_n est polynôme. En particulier, $\frac{d^n}{dx^n}f$ tend vers 0 quand $x \to \pm 1$, et par prolongement de la dérivée, f est une fonction C^{n-1} pour tout n, donc C^∞, à support dans $[-1, 1]$. On pose $h(x) = C\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, où la constante C est ajustée pour que $h(x) = 1$ si $x \geq 1$. h est positive, croissante et pour $x \leq -1$, $h(x) = 0$. La fonction $g(x) = h(3 + 2x)h(3 - 2x)$ répond à la question.

2. Soit x_n une suite dense de Ω. Si c'est possible, on choisit ε_n tel que $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ pour un certain i, et $B(x_n, 3\varepsilon_n)$ n'est inclus dans aucun V_i : sinon, on choisit $\varepsilon_n = 1$, et $B(x_n, 3) \subset V_i$. Montrons que pour tout $x \in \Omega$, il existe n tel que $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Soit i tel que $x \in V_i$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V_i$. Soit x_n tel que $d(x, x_n) < \varepsilon/4 < 1$. Si $\varepsilon_n = 1$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Sinon $B(x_n, 3\varepsilon/4) \subset B(x, \varepsilon) \subset V_i$, donc $3\varepsilon_n \geq 3\varepsilon/4$. Ainsi, $\varepsilon_n \geq \frac{\varepsilon}{4}$ et $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Dans tous les cas $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$.

On pose $\psi_n(x) = g(|x - x_n|/\varepsilon_n)$: alors ψ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ et $\psi_n|_{B(x_n,\varepsilon_n)} = 1$. On définit maintenant $\varphi_1 = \psi_1$ et :

$$\varphi_n = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1})\psi_n.$$

On vérifie immédiatement par récurrence que pour tout n :

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_n).$$

Si $x \in \Omega$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$ pour un certain n et donc $\varphi_m(x) = 0$ pour $m > n$ et :

$$\sum_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_m(x) = 1.$$

D'autre part, φ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n)$, donc dans l'un des V_i. Enfin, si K est un compact de Ω, il existe m tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} B(x_n, \varepsilon_n)$ d'où le résultat.

3. K étant compact, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $V_\varepsilon = \{x | d(x, K) < \varepsilon\}$ soit un voisinage ouvert de K, d'adhérence compacte, et inclus dans Ω. On considère le recouvrement de Ω par les ouverts $V_{2\varepsilon_0/3}$ et $\Omega \backslash \overline{V_{\varepsilon_0/3}}$. Par la question précédente, on dispose d'un partition de l'unité φ_n. On pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n:\mathrm{Supp}\, \varphi_n \subset V_{2\varepsilon_0/3}} \varphi_n(x).$$

Alors la somme étant localement finie, φ est C^∞ à support dans $V_{2\varepsilon_0/3}$, donc compact et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Enfin, pour $x \in V_{\varepsilon_0/3}$,

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{n:\mathrm{Supp}\, \varphi_n \subset \Omega \backslash \overline{V_{\varepsilon_0/3}}} \varphi_n(x) = 1.$$

Ainsi φ répond à la question.

$\star$

Solution 3. *Support singulier d'une distribution*

On considère un ensemble d'ouverts Ω_i sur lesquels u est C^∞. Sur chauque Ω_i, u s'identifie donc à une fonction $\psi_i \in C^\infty(\Omega_i)$. On peut choisir $\psi \in C^\infty(\cup \Omega_i)$ telle que $\psi|_{\Omega_i} = \psi_i$. ψ est bien définie. En effet, $\forall f \in \mathcal{D}(\Omega_i \cap \Omega_j)$, on a

$$< \phi_i, f >=< u, f >=< \phi_j, f >$$

donc $\phi_i = \phi_j$ sur $\Omega_i \cap \Omega_j$. Soit maintenant $f \in \mathcal{D}(\cup \Omega_i)$. On introduit la partition de l'unité ϕ_i associée aux Ω_i. Alors

$$< u, f >=< u, \sum \phi_i f >= \sum < u, \phi_i f >= \sum < \psi, \phi_i f >=< \psi, f >$$

(comme f est à support compact, la somme $\sum \phi_i f$ est finie donc il n'y a pas de problème pour sortir la somme du crochet)

$\star$

Solution 4. *Quelques exemples de distributions*

1. La formule définit bien une distribution (d'ordre au plus k sur le compact $[-k,k]$). Supposons l'ordre fini, disons k, alors, en faisant une translation de $k+1$, il existe C, tel que pour $\phi \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, on ait

$$|\phi^{(k+1)}(0)| \leq C \sum_{i=1}^{k} \sup_{x\in]-1,1[} |\partial^i \phi(x)|.$$

Une telle inégalité ne peut pas avoir lieu, vu qu'il existe des fonctions $\mathcal{C}^k$ qui ne sont pas $\mathcal{C}^{k+1}$.

2. On calcule :

$$(\partial_x u + \partial_y u, \phi) = -\int (\phi_x(t,t) + \phi_y(t,t))dt = -\int \frac{d}{dt}(\phi(t,t))dt = 0.$$

3. $e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de R_+^*, $e^{1/x^2} \in C^0(K)$. Par contre, considérons $\phi \in \mathcal{D}(]1,2[)$ positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on calcule et $\phi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, $\phi_k \in \mathcal{D}([0,2])$ et pour tout m,

$$\|\partial_x^m \phi_k\|_{C^0} = 2^{-k} k^m \|\partial_x^m \phi\|_{C^0} \to 0 \text{ quand } k \to \infty.$$

Mais :

$$\int e^{1/x^2} \phi_k(x)dx \geq e^{k^2/4} 2^{-k} \frac{1}{k} \to \infty.$$

4. On cherche v tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(v,\phi') = -(u,\phi)$. Il faut remarquer que les fonctions de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle sont exactement les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}$. Ainsi, si ψ est d'intégrale nulle, $\psi = \phi'$ ($\phi \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée : $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)dt$) et $(v,\psi) = -(u,\phi)$.

Maintenant, soit $\chi \in \mathcal{D}$, d'intégrale 1. On choisit comme on veut (v,χ) : ensuite, si $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi - (\int \psi)\chi$ est d'intégrale nulle, donc c'est un certain ϕ', et :

$$(v,\psi) = -(u,\phi) + \left(\int \psi\right)(v,\chi).$$

On obtient ainsi un espace de dimension 1 de primitives de u.

Réciproquement, si v est une primitive de u, v est déterminé sur l'hyperplan des fonctions de $\mathcal{D}$ d'intégrale nulle, et sa valeur en χ la définie complétement, donc l'espace des primitives est de dimension 1.

⋆

Solution 5. *Support et ordre*

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n vaut :

$$n\phi(0) + \phi'(0)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi(1/i)}{i^2} - n\phi(0) - \phi'(0)\log n.$$

il est bien connu que que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$ et la série résiduelle est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: $u(\phi)$ est bien défini. Enfin, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ (formule de Taylor avec reste intégral), on en déduit que $|u(\phi)| \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$ et u est d'ordre au plus 2.

1. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1/i\}$. Bien sûr, $S \subset K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V s'annule contre T. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j - \varepsilon, 1/j + \varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. S est un support, donc est fermé et $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

2. On voit que $u(\phi_k) \sim \sqrt{k}$, mais comme $\partial^\alpha \phi_k(1/j) = 0$ si $\alpha \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p} \sup_{x \in S} |\partial_x^i \phi_k(x)| \leq 1/\sqrt{k}.$$

D'où le résultat.

3. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type :

$$|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc le cut-off d'une primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{D}(]-1,2[$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose :

$$\psi_k(x) = \psi(x) \int_0^x \int_0^y \phi(kt) dt dy.$$

Alors $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$ et $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est majoré par C/k.

D'autre part :

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i).$$

Remarquons que par définition, $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$ si $x \in [0,1]$. Donc :

$$\left| \sum_{i=k+1}^{\infty} \psi_k(1/i) \right| \leq C\|\phi\|_{L^\infty} 1/k.$$

Enfin, sur $[1/k, 1]$, ψ_k est affine de pente $1/k$, donc :

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k} (\psi_k(1/k) + 1/k(1/i - 1/k)) = k\psi_k(1/k) + \log k/k + O(1/k).$$

Comme $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} x^2/2$, $k\psi_k(1/k) \leq C/k$ et $u(\psi_k) \sim \log k/k$, d'où la conclusion.

⋆

Solution 6. *Distributions qui sont régulières*

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p ($p < \infty$) (considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut etre étendue à en $\tilde{T}$ application continue $L^p \to \mathbb{R}$ (avec la meme inégalité). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\phi) = \int f\phi$ pour tout $\phi \in L^p$, donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

2. On essaye d'appliquer le résultat précédent. Comme pour la primitivation d'une distribution, on introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $\int \chi = 1$ et $\chi \geq 0$. Soit donc $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[$. Alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\phi = \psi' + \left(\int \phi\right)\chi$. Ainsi :

$$T(\phi) = T(\psi') + \left(\int \phi\right) T(\chi) = -\int f\psi + \left(\int \phi\right) T(\chi).$$

Mais $T(\chi)$ est une constante C et $|\int \phi| \leq \|\phi\|_{L^2}$ (par Holder). Enfin, $\left|\int f\psi\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de ϕ. Pour cela, on a :

$$\psi^2(x) = 2\int_0^x \psi'(t)\psi(t)dt \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Quand on intègre en x, entre 0 et 1, on obtient $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$, d'où $\|\psi\|_{L^2} \leq 2\|\psi'\|_{L^2}$. Et donc :

$$\|\psi\|_{L^2} \leq 2\left\|\phi - \left(\int \phi\right)\chi\right\|_{L^2} \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2})\|\phi\|_{L^2}.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$|T(\phi)| \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2} + |T(\chi)|)\|\phi\|_{L^2}.$$

Par 1., T s'identifie à $u \in L^2(]0,1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0,1])$ avec $v(0) = 0$. Alors :

$$|v^2(x)| = 2\left|\int_0^x v'(t)v(t)dt\right| \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}.$$

Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq 2(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. En reprenant les estimées précédentes, on voit $u_n(x) = \int_0^x v_n(t)dt$ est de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$, puis $C^0([0,1])$, donc converge vers $\tilde{u}$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (primitivation d'une distribution), et $u \in C^0([0,1])$.

3. L'hypothèse s'écrit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, :

$$\int f\phi + T(\phi') = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, telle que $\int \chi = 1$. On définit g la primitive de f telle que $\int g\chi = T(\chi)$ (g est C^1). Alors on a également, par intégration par partie $\int f\phi + T_g(\phi') = 0$. On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(T - T_g)(\phi') = 0$. Pour $\psi \in \mathcal{D}$, $\int(\psi - (\int \psi)\chi) = 0$, donc si $\phi(x) = \int_{-\infty}^x (\psi - (\int \psi)\chi)$, $\phi \in \mathcal{D}$ et $\phi' = \psi - (\int \psi)\chi$. Vu ce qui précède :

$$(T - T_g)(\psi) = \int \psi \cdot (T - T_g)(\chi) = 0.$$

Donc finalement, $\forall \psi \in \mathcal{D}, (T - T_g)\psi = 0$. On en déduit que $T = T_g$, et par définition $g' = f$.

4. $g(x) = \exp(-\int_0^x a(t)dt)$ est une fonction C^∞, on peut donc calculer :

$$(gu)'(\phi) = -gu(\phi') = -u(g\phi') = u(g'\phi - (g\phi)').$$

Mais $g' = -ag$, donc : $u(g'\phi - (g\phi)') = au(g\phi) + u'(g\phi) = fg\phi$, donc $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u est C^1.

⋆