Correction du Td n° 3 d'Analyse fonctionnelle

Compacité

Séance du 27 février 2015

Solution 1. *Mesure de Haar sur les groupes compacts*

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a \in G$. Comme f est continue en a, il existe un voisinage W_a de e tel que

$$|f(t)_f(a)| \leq \varepsilon$$

pour tout $t \in aW_a$. Comme G est un groupe topologique, il existe un voisiange V_a de e tel que $V_a V_a^{-1} \subset W_a$. On considère le recouvremen te G par les ouverts aV_a. Par compacité, on peut en extraire un recouvrement par les aV_a où $a \in A$ un ensemble fini de G.

On pose $V = \cap_{a \in A} V_a$ Soit $x, y \in G$ tels que $x^{-1}y \in V$. Il existe a_0 in A tel que $y \in a_0 V_{a_0} \subset a_0 W_{a_0}$ donc

$$|f(y) - f(a_0)| \leq \varepsilon.$$

Ensuite comme $x \in yV^{-1} \subset a_0 V_{a_0} V^1 \subset a_0 V_{a_0} V_{a_0}^{-1} \subset a_0 W_{a_0}$ on a

$$|f(x) - f(a_0)| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$|f(y) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. $x^{-1}y \in V$ alors $(sx)^{-1}(sy) = x^{-1}y \in V$ donc

$$|L_s f(x) - L_s f(y)| \leq 2\varepsilon.$$

La famille des $L_s f$, $s \in G$ est donc équicontinue (et bornée) donc satisfait les hypothèses du théorème d'Arzela Ascoli.

3. On remarque $L_s L_t = L_{st}$. L'ensemble $\{L_s : C(G) \to C(G)\}$ est donc un groupe équicontinu applications linéaires $C(G) \to C(G)$. De plus $L_s(\overline{H_L f}) \subset \overline{H_L f}$ pour tout s. Le théorème de Kakutani nous dit donc qu'il existe $\phi \in \overline{H_L f}$ tel que $L_s \phi = \phi$ pour tout s. En particulier $L_s \phi(e) = \phi(s) = \phi(e)$ donc ϕ est constante.

4. Soit $c \in \overline{H_L f}$ et $c' \in \overline{H_R f}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille finie de $a_i \in G$ et des constantes $\alpha_i \geq 0$ avec $\sum \alpha_i = 1$ telle que

$$|c - \sum \alpha_i f(a_i x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in G$. De même il existe une famille finie de $b_j \in G$ et des constantes $\beta_j \geq 0$ avec $\sum \beta_j = 1$ telle que

$$|c' - \sum \beta_j f(x b_j)| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in G$. En particulier

$$\alpha_i |c' - \sum \beta_j f(a_i b_j)| \leq \alpha_i \varepsilon$$

et en sommant sur i

$$|c' - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)| \leq \varepsilon.$$

Symmétriquement
$$|c - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j)| \leq \varepsilon.$$
et donc $|c - c'| \leq 2\varepsilon$. On a donc $c = c'$.

5. On sait qu'il existe au moins une fonction constante dans $\overline{H_L f}$ et une fonction constante dans $\overline{H_R f}$. Ces constantes devant être égales, il existe en fait une unique fonction constante dans $\overline{H_L f}$ qui est aussi dans $\overline{H_R f}$.

6. Seule la dernière proposition n'est pas triviale. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille finie de $a_i \in G$ et des constantes $\alpha_i \geq 0$ avec $\sum \alpha_i = 1$ telle que
$$|Mf - \sum \alpha_i f(a_i x)| \leq \varepsilon.$$
Considérons $h = \sum \alpha_i g(a_i x)$. On a $\overline{H_L h} \subset \overline{H_L g}$ donc $Mh = Mg$. Il existe donc une famille finie de $b_j \in G$ et des constantes $\beta_j \geq 0$ avec $\sum \beta_j = 1$ telle que
$$|Mg - \sum \beta_j h(b_j x)| \leq \varepsilon.$$
on a donc
$$|Mg - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j g(a_i b_j x)| \leq \varepsilon.$$
Par ailleurs, par un argument du même type que dans la question précédente, on a
$$|Mf - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j f(a_i b_j x)| \leq \varepsilon,$$
et donc
$$|Mf + Mg - \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (f+g)(a_i b_j x)| \leq \varepsilon,$$
et donc $M(f+g) = M(f) + M(g)$.

7. On applique le théorème de représentation de Riesz à M qui est une forme linéaire continue positive sur $C(G)$.

8. On considère l'application linéaire $M'(f) = \int f(x^1) dm$. M' satisfait toutes les propriétés citées dans la question précédente. On a donc $M'(\sum \alpha_i L_{a_i} f) = M'(f)$. M' est donc constante sur $\overline{H_L f}$. En particulier
$$Mf = M'(Mf) = Mf.$$

⋆

Solution 2. *Opérateurs compacts*

1. Un s.e.v. de dim fini est localement compact, donc un opérateur continu de rang fini est compact. D'autre part, la limite d'opérateurs compact est compacte. En effet, soit $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$ et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que $\|T_n - T\| \to 0$. Montrons que $T(B_E)$ est précompacte. Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|T_N - T\| < \varepsilon$ et comme $\overline{T_N(B_E)}$ est compacte, $T_N(B_E)$ est précompacte. On peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon ε, $B(T_N x_i, \varepsilon)$. Soit alors $Tx \in T(B_E)$, il existe i tel que $T_N x \in B(T_N x_i, \varepsilon)$ et donc
$$\|Tx - Tx_i\| \leq \|(T - T_N)x\| + \|T_N x - T_N x_i\| + \|(T_N - T)x_i\| \leq 3\varepsilon.$$

Finalement, $Tx \in B(Tx_i, 3\varepsilon)$ et $T(B_E) \subset \cup B(Tx_i, 3\varepsilon)$. $T(B_E)$ est donc précompacte, et comme F est complet, T est compact.

2. Si T est compact, ce résultat a été vu en cours (et E réflexif n'est pas nécessaire). Montrons la réciproque. Soit B la boule unité fermée de rayon 1 et de centre 0 de E. Soit $(x_n)_n$ une suite déléments de B. Comme E est réflexif, on peut supposer que $x_n \rightharpoonup x$ dans B. L'hypothèse de l'énoncé nous donne alors que $(Tx_n)_n$ tend vers Tx. Donc l'image de la boule unité est bien relativement compact et T est compact.

3. On a $M_a \delta_{kn} = a_k \delta_{kn}$, donc si $M_a \in \mathcal{L}(E, F)$, (a_n) est bornée. Réciproquement on a bien sur $\|M_a u\|_{\ell^2} \leq \|a_n\|_{\ell^\infty} \|u\|_{\ell^2}$.

Si $a_n \to 0$, considérons les suites $a^m = (a_n^m \mathbb{1}_{n \leq m})_n$. Alors M_{a^m} est de rang fini, et on voit que $\|M_a - M_{a^m}\| = \sup_{n \geq m} |a_n| \to 0$ quand $m \to \infty$. Ainsi, M_a est limite d'opérateur de rang fini, et est donc compact.

Réciproquement, supposons M_a est compact. Considérons $\delta^k = (\delta_{kn})_n$. $\delta^k \rightharpoonup 0$ donc $M_a \delta^k$ converge fortement vers 0 dans ℓ^2. Mais $\|M_a \delta^k\| = \|a_k \delta^k\| \to 0$.

⋆

Solution 3. *S.e.v. de fonctions dérivables fermé dans les fonctions continues*

1. On utilise le théorème du graphe fermé. Supposons que $(f_n, f_n') \to (f, g)$ dans la norme du graphe, ie C^0. On a :

$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt$$

Cette égalité passe à la limite dans, donc :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)dt$$

Ce qui prouve que f est C^1 et que $f' = g$. Ainsi D est continue. On peut également considérer $Id : (F, \|\cdot\|_{C^1}) \to (F, \|\cdot\|_{C^0})$ (vérifier que les espaces en jeu sont complets) et utiliser le théorème d'isomorphisme de Banach.

2. Soit K la norme d'opérateur de D. On considère B la boule unité du Banach F (muni de la norme C^0). Si $f \in B$, $\|f'\|_{C^0} \leq K$. On en déduit que B est formé de fonctions uniformément borné (par 1), K-lipschitziennes donc équicontinues : le théorème d'Ascoli s'applique, et donc B est relativement compact. Mais la boule unité d'un e.v.n n'est relativement compacte que s'il est de dimension finie.

(Rappel : un e.v.n. E localement compact est de dimension finie. Tout d'abord E est bien évidemment complet. Soit donc U un voisinage ouvert de 0, tel que $\bar{U}$ soit compact. U est relativement compact, donc U peut être recouvert par un nombre fini d'ouvert de type $x + \frac{1}{2}U$ (avec $x \in U$), disons :

$$U \subset \bigcup_{i=1}^n x_i + \frac{1}{2}U.$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_i)$. On a en particulier : $U \subset F + \frac{1}{2}U$.

Par récurrence immédiate, on obtient : $U \subset F + \frac{1}{2^k}U$. U étant relativement compact, U est borné ; de plus F, de dimension finie, est un s.e.v. fermé. On en déduit que :

$$U \subset \bar{F} = F$$

U étant un voisinage de 0, on conclut par homogénéité que $E \subset F$, et $E = F$ est de dimension finie.)

⋆

Solution 4. *Opérateurs à noyaux*

1. L'inégalité de Holder donne

$$|Tf(x)| \leq \Big(\int_{X\times Y} |k(x,y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2} \Big(\int_Y |f(y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2}.$$

En intégrant le carré de cette inégalité sur X et en utilisant le théorème de Fubini, on en déduit que

$$\|Tf\|_{L^2(X)} \leq \|k\|_{L^2(X\times Y)} \|f\|_{L^2(Y)}.$$

D'où la continuité de T.

Comme $L^2(X,\mu)$ est réflexif, alors on a vu que pour montrer la compacité de T, il suffit de montrer que si $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(X,\mu)$, alors $(Tf_n)_n$ converge fortement vers Tf. Par linéarité, on peut supposer que $f = 0$. Or si $f_n \rightharpoonup 0$, alors $Tf_n(x) \to 0$ pour tout x tel que $y \mapsto k(x,y) \in L^2(Y,\eta)$, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, on a vu que dans ce cas

$$|Tf(x)| \leq \Big(\int_{X\times Y} |k(x,y)|^2 d\eta(y)\Big)^{1/2} \|f_n\|_{L^2(Y)}.$$

Comme une suite faiblement convergente est bornée, on en déduit $(Tf_n)_n$ est bornée presque partout par une fonction $L^2(X,\mu)$. donc le théorème de convergence dominée entraîne que $Tf_n \to 0$ dans $L^2(X,\mu)$ fortement.

⋆