Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 3

Topologies faible et faible-$*$ (1)

Séance du 13 février 2017

Solution 1. *Échauffement : trois exemples fondamentaux*

1. On commence par remarquer que $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la convergence vers 0 ne peut pas être forte. On raisonne ensuite par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact, $\langle u_n, \psi \rangle = \int u_n \bar{\psi} \to 0$, ce qui est immédiat, car les supports des deux fonctions sont disjoints si n assez grand. Ensuite, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ quelconque, on trouve $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\|f - \psi\|_{L^2} \leq \varepsilon$. On a $|\langle u_n, f \rangle| \leq |\langle u_n, f - \psi \rangle| + |\langle u_n, \psi \rangle| \leq \|\phi\|_{L^2}\varepsilon + |\langle u_n, \psi \rangle|$ par Cauchy-Schwarz, donc $\limsup_{n\to+\infty} |\langle u_n, f \rangle| \leq C\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat.

2. Comme précédemment, $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, donc la convergence vers 0 ne peut pas être forte. Ensuite, il suffit de constater que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est dense dans L^2, et que le support de v_n se concentre autour de 0.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^1_{per}([0, 2\pi])$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int_0^{2\pi} e^{iknx}\psi(x)dx = -\frac{1}{ikn}\int_0^{2\pi} e^{iknx}\psi'(x)dx = \mathcal{O}(1/n).$$

Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$, avec convergence de la série dans L^2. D'après le calcul précédent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_n^{(N)} := \sum_{|k|\leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. À présent, si $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, comme à n fixé, $w_n^{(N)} \to w_n$ dans $L^2([0, 2\pi])$ quand $N \to +\infty$, et ceci uniformément par rapport à n, on a

$$|\langle w_n - a_0, \phi \rangle| \leq |\langle w_n^{(N)} - a_0, \phi \rangle| + |\langle w_n - w_n^{(N)}, \phi \rangle| \leq |\langle w_n^{(N)} - a_0, \phi \rangle| + \left(\sum_{|k|>N} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{L^2},$$

et donc $\limsup_{n\to\infty} |\langle w_n - a_0, \phi \rangle| \leq R_N \|\phi\|_{L^2}$, avec $R_N \to 0$ quand $N \to +\infty$, d'où le résultat. Ainsi, $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2([0, 2\pi])$.

D'autre part, la suite $\{w_n\}$ ne converge pas fortement car d'après la formule de Parseval, $\|w_n - a_0\|_{L^2} = \|w - a_0\|_{L^2}$, qui n'est jamais nul, puisque w n'est pas constante.

⋆

Solution 2. *La topologie faible n'est pas métrisable*

1. Tout voisinage faible de E est le translaté d'un voisinage faible de 0, donc il suffit de montrer que tout voisinage faible de 0 contient une droite. Un tel voisinage contient une intersection finie d'ensembles du type $\{x \in E \mid |\ell(x)| < \alpha\}$, pour un certain $\ell \in E^*$, et $\alpha > 0$. Il suffit donc de montrer qu'une intersection finie d'hyperplans de E n'est pas réduite à $\{0\}$. Supposons que $\bigcap_{j=1}^N \ker \ell_j = \{0\}$, où $\{\ell_j\}$ est une famille finie de E^*, et considérons l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^N$, $x \mapsto (\ell_1(x), \ldots, \ell_N(x))$. Alors Φ est injective, vu

la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq N$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur la dimension de E. Il existe donc $x \in \bigcap_{j=1}^N \ker \ell_j$ non nul, et $x\mathbb{R} \subset \bigcap_{j=1}^N \ell_j^{-1}(]-\alpha_j, \alpha_j[)$, quel que soit $\alpha_j > 0$.

2. Si la topologie faible est métrisable, alors les boules $B(0, 1/n)$ (pour la distance) sont des ouverts faibles : elles contiennent donc une droite $y_n\mathbb{R}$. On pose $x_n = ny_n/\|y_n\|$. Alors $\|x_n\| = n$ et $x_n \in B(0, 1/n)$ donc $x_n \rightharpoonup 0$.

C'est une contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus qui assure que toute suite faiblement convergente est bornée : en effet, si E est normé, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est toujours un Banach (comme $\mathbb{R}$ est complet). Considérons la suite d'applications $\varphi_n : E^* \to \mathbb{R}$, $\ell \mapsto \ell(x_n)$. Alors φ_n est une application linéaire bornée, dont la norme (par Hahn-Banach) vaut $\|x_n\|$. Or, pour tout $\ell \in E^*$ fixé, $\sup_n |\varphi_n(\ell)| < +\infty$, car $\ell(x_n) \to 0$, par définition de la convergence faible. Donc le théorème de Banach-Steinhaus affirme que $\sup_n \|\varphi_n\|_{E^*} < +\infty$, ce qui signifie exactement que la suite $\{x_n\}$ est bornée dans E.

3. (Lemme des noyaux.) Considérons $\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x) = (\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un convexe fermé (un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$), et par la condition sur les noyaux, $a = (1, 0, \ldots, 0) \notin \Phi(E)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$, notée ℓ, et donnée par $\ell(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j$, et qui sépare strictement $\Phi(E)$ de a. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \Phi(E)$, $\ell(x) < c$ et $\ell(a) > c$. Comme $0 \in \Phi(E)$, $c > 0$ et par homogénité, on a $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in \Phi(E)$. Cela signifie que

$$\forall y \in E, \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j \phi_j(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{j=0}^n \lambda_j \phi_j = 0.$$

Mais $\ell(a) = \lambda_0 > c > 0$, et donc on peut diviser par λ_0, ce qui prouve que $\phi_0 \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$.

4. Un voisinage élémentaire (de 0) pour la topologie faible est

$$U = \{x \in E \mid |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \ldots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\}.$$

où $\ell_1, \ldots, \ell_k \in E'$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ sont donnés. Si E est métrisable, il existe une base dénombrable de voisinages (élémentaires) de 0 : chacun de ces voisinages ne fait intervenir qu'un nombre fini de formes linéaires. Notons F l'ensemble dénombrable des formes linéaires mises en jeu.

Soit $\ell \in E'$. Alors $\{x \in E \mid |\ell(x)| < 1\}$ est un voisinage faible de 0, donc il existe $\ell_1, \ldots, \ell_k \in F$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k > 0$ tels que :

$$\{x \in E \mid |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \ldots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\} \subseteq \{x \in E \mid \ |\ell(x)| < 1\}.$$

En particulier, si $x \in \bigcap_{i=1}^k \ker \ell_i$, alors $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^k \ker \ell_i$ et $|\ell(\lambda x)| < 1$, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $x \in \ker \ell$. Par la question précédente on en déduit que $\ell \in \mathrm{Vect}(\ell_1, \ldots, \ell_k)$.

Le raisonnement précédent montre que E^* est à base au plus dénombrable (au sens algébrique). Mais E^* est complet et de dimension infinie : par le théorème de Baire, c'est absurde (E^* ne saurait s'écrire comme la réunion dénombrable de sous-espaces de dimension finie, qui sont des fermés d'intérieur vide).

$\star$

Solution 3. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

1. Si $\|x\| < 1$, tout voisinage faible de x contient une droite D passant par x ; notons u un vecteur directeur de D. Cette droite coupe nécessairement S (grâce au théorème des

valeurs intermédiaires, appliqué à $t \mapsto \|x+tu\|$). Donc tout voisinage faible de x intersecte S.

2. Si l'on note $\overline{S}^*$ l'adhérence faible de S, cela prouve que $B \subseteq \overline{S}^*$. Il suffit à présent de montrer que B est un fermé faible, et on aura $B = \overline{S}^*$. Pour cela, supposons que $x \notin B$. Alors on peut séparer strictement $\{x\}$ du convexe fermé B. Il existe $\ell \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall y \in B$, $\ell(y) < c$, et $\ell(x) > c$. Alors l'ouvert faible $\ell^{-1}(]c, +\infty])$ contient x, et n'intersecte pas B : cela prouve donc que $E \setminus B$ est un ouvert faible.

⋆

Solution 4. *ℓ^1 a la propriété de Schur*

1. L'application d est bien définie sur $B^* \times B^*$. Elle vérifie toutes les propriétés d'une distance : inégalité triangulaire (simple conséquence de celle sur $\mathbb{R}$), symétrie, et séparation (car si ℓ et ℓ' coïncident sur chaque x_n, alors, elles coïncident par continuité sur B, et par linéarité sur E).

Enfin, montrons que d engendre la topologie faible-$*$ sur B^*. Tout d'abord, soit $B(\ell, r)$ une boule pour d, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n+2} < r$. Alors on a un ouvert faible-$*$

$$\bigcap_{j=0}^{n} \left\{ \ell' \in E^* \;\middle|\; |(\ell - \ell')(x_j)| \leq \frac{r}{n+1} \right\} \subseteq B(\ell, r).$$

Réciproquement, si V est un voisinage faible-$*$ de $\ell \in E^*$, alors V contient un ensemble du type $\bigcap_{j=1}^{N} \{\ell' \in E^* \mid |(\ell - \ell')(y_j)| \leq \varepsilon\}$, pour un certain $\varepsilon > 0$, et $y_1, \dots, y_N \in E$ (on peut même les supposer dans B, quitte à réduire ε). Choisissons alors $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall 1 \leq j \leq N$, $\|y_j - x_{k_j}\| \leq \varepsilon/4$. Choisissons $M \gg k_1, \dots, k_N$. Alors $B(\ell, \varepsilon \cdot 2^{-M}) \subset V$.

2. On considère $e^k := \{\delta_{jk}\}_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, qui définit pour chaque $k \in \mathbb{N}$ une forme linéaire continue sur ℓ^1. Alors $\langle e^k, u^n \rangle = u^n_k \to 0$ quand $n \to \infty$ (par définition de la convergence faible).

3. Cette distance induit bien la même topologie que la topologie faible-$*$, car on peut répéter les arguments de la question 1, en se rappelant que $\mathrm{Vect}\{e^k\}$ est dense dans ℓ^1.

Par ailleurs, B^* est compact pour la topologie faible-$*$ (par le théorème de Banach-Alaoglu), donc compact (et complet) pour $\tilde{d}$.

4. Tout d'abord, F_n est fermé, car c'est l'intersection des fermés $G^k := \{v \in B^* \mid |\langle v, u^k \rangle| \leq \varepsilon\}$ pour $k \geq n$. Ensuite, grâce à la convergence faible, $\langle v, u^k \rangle \to 0$ donc $\bigcup_n F_n = B^*$. Par Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que F_n soit d'intérieur non vide. Comme F_n est équilibré et convexe, F_n est un voisinage de 0. Par définition de la distance, il existe donc $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $v \in B^*$,

$$(\forall k \leq N,\ |v_k| \leq \delta) \Rightarrow v \in F_n.$$

On choisit donc v^m tel que

$$\begin{cases} v^m_k = 0 & \text{si } k \leq N, \\ v^m_k = \mathrm{sgn}(u^m_k) & \text{si } k > N. \end{cases}$$

Alors $v^m \in F_n$, donc pour $m \geq n$, on a en particulier :

$$|\langle v^m, u^m \rangle| < \varepsilon, \quad \text{i.e.} \sum_{k=N+1}^{\infty} |u^m_k| < \varepsilon.$$

Enfin, on choisit $n' \geq n$ assez grand, tel que la question 2 s'applique pour $k \leq N$ et ε/N, et on en déduit que si $m \geq n'$, $\|u^m\|_{\ell^1} < 2\varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

5. L'application id : $(\ell^1, \sigma(\ell^1, (\ell^1)^*)) \to (\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue (nous venons de le prouver), mais elle n'est pas continue, car sinon, ce serait un homéomorphisme, et on a vu dans l'exercice précédent que les topologies faible et forte ne coïncident jamais en dimension infinie.

⋆

Solution 5. *L'application J (suite)*

1. Montrons qu'en général, $\overline{J(B_E)}$ est dense dans $B_{E^{**}}$ muni de la topologie faible-$*$. En effet, s'il existe $x_0 \in B_{E^{**}} \setminus \overline{J(B_E)}$, on peut le séparer strictement de $\overline{J(B_E)}$ par une forme linéaire ℓ sur E^{**} continue pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Montrons que ℓ est l'évaluation φ_ψ en une forme linéaire $\psi \in E^*$. En effet, $\ell^{-1}(]-1,1[)$ est un ouvert faible-$*$ qui contient 0. Donc il existe des points $f_1, \ldots, f_N \in E^*$, et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\bigcap_{j=1}^{N} \{\ell' \in E^{**} \mid |\varphi_{f_j}(\ell')| = |\ell'(f_j)| < \varepsilon\} \subset \ell^{-1}(]-1,1[).$$

Donc $\bigcap_{j=1}^{N} \ker \varphi_{f_j} \subseteq \ell^{-1}(]-1,1[)$, et c'est même un sous-ensemble de $\ker \ell$, puisque ℓ est bornée, donc nulle, sur le sous-espace de gauche. Ainsi, par le lemme des noyaux, $\ell = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{f_j} = \varphi_{\sum_j \lambda_j f_j}$.

Comme $\ell = \varphi_\psi$, pour tout $x \in B_E$, $\ell(\varphi_x) = \varphi_x(\psi) = \psi(x)$, donc pour tout $x \in B_E$, $|\psi(x)| < c$, tandis que $x_0(\psi) > c$. La première inégalité prouve que $\|\psi\|_{E^*} \leq c$, et donc $|x_0(\psi)| \leq \|x_0\|_{E^{**}} \|\psi\|_{E^*} \leq c$, d'où une contradiction.

À présent, il reste à voir que J est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. En effet,

$$J^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{N} \{\ell \in E^{**} \mid |\ell(f_j)| \leq \varepsilon\}\right) = \{x \in E \mid |\varphi_x(f_j)| = |f_j(x)| \leq \varepsilon\}, \qquad (\star)$$

qui est précisément un voisinage faible de 0 dans E. De la sorte, si B_E est faiblement compacte, alors $J(B_E)$ est faible-$*$ compacte dans $B_{E^{**}}$, et comme elle est dense par ailleurs, on a $J(B_E) = B_{E^{**}}$, et donc E est réflexif.

Réciproquement, si E est réflexif, alors $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est un homéomorphisme (on vérifie immédiatement, à partir de $(\star)$, que J est ouverte), donc $B_E = J^{-1}(B_{E^{**}})$ est faiblement compacte, par Banach-Alaoglu.

2. Si E est réflexif, et F est un sous-espace fermé de E, alors la boule unité de F est un convexe fermé fort. C'est donc un fermé faible, inclus dans la boule unité de E, qui est un compact faible. La boule unité de F est donc faiblement compacte, et donc F est réflexif.

3. La réponse est dans l'indication ! Tout compact faible de E est séquentiellement compact, donc si E est réflexif, toute suite bornée appartient à un compact faible de E, donc admet une sous-suite faiblement convergente. Inversement, si toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente, alors la boule unité de E est faiblement séquentiellement compacte, donc faiblement compacte, et donc E est réflexif.

⋆