Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n^o 3

Théorèmes de Hahn-Banach - Convexité

Séance du 18 février 2019

Solution 1. *Échauffement : théorème de Hahn-Banach (forme géométrique)*

1. Soit $F \subsetneq E$ un sous-espace fermé strict. Soit $x \in E \setminus F$, et ℓ une forme linéaire continue sur E séparant strictement le compact $\{x\}$ du fermé F :

$$\forall y \in F, \quad \ell(y) < \ell(x).$$

Nécessairement, $\ell|_F \equiv 0$, car s'il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell(y_0) \neq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on devrait avoir $t\ell(y_0) = \ell(ty_0) < \ell(x)$, ce qui est impossible. Cela prouve que $F \subseteq \ker \ell$.

2. Comme A est fini de cardinal 2^n, en notant $A = \{a_1, \dots, a_{2^n}\}$, on voit immédiatement que $\mathrm{co}(A) = \{\sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i a_i; \forall i \in [\![1, 2^n]\!], \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i = 1\}$ est compact, donc fermé. Soit $x \in B$. Pour montrer que $x \in \mathrm{co}(A)$, il suffit de montrer qu'on ne peut pas le séparer du convexe fermé $\mathrm{co}(A)$ au moyen d'une forme linéaire continue, et ainsi appliquer le théorème de Hahn-Banach. Soit $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, on cherche à montrer que

$$f(x) \leq \sup_{\varepsilon \in A} f(\varepsilon).$$

Soit $(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i x_i$. En choisissant $\varepsilon_i = \mathrm{sgn}(f_i)$, on a $f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n |f_i| \geq \sum_{i=1}^n |f_i||x_i| \geq f(x)$. Par conséquent, $B \subset \mathrm{co}(A)$. L'inclusion inverse est immédiate.

⋆

Solution 2. *Application du critère dual de densité*

1. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\ell^p(\mathbb{N})$ et nulle sur V. Comme $p < +\infty$, on sait que ℓ s'identifie à une suite $\beta = (\beta(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$, où q est l'exposant conjugué de p. En particulier, on a

$$0 = \ell(u_k) = \sum_{n\geq 0} \beta(n) u_k(n) = \sum_{n \geq 0} \beta(n)(\alpha_k)^n.$$

Définissons donc la fonction $f(z) := \sum_j \beta(j) z^j$, qui converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$ puisque $\beta(j) \to 0$ quand $j \to +\infty$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(\alpha_k) = 0$, et comme les α_k s'accumulent en 0, le principe des zéros isolés stipule que f est identiquement nulle. Donc $\beta = 0$, et par conséquent $\ell = 0$.

2. Soit ℓ une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, nulle sur W. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = \ell(-a_n \cdot f_{a_n}) = \ell\left(\frac{1}{1 - \frac{x}{a_n}}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\ell(x^j)}{a_n^j},$$

où nous avons utilisé la continuité de ℓ pour la permutation avec le signe somme. Comme l'égalité précédente est vraie pour tout n, cela pousse à définir une fonction génératrice $f(z) := \sum_j \ell(x^j) z^j$. Cette série converge sur le disque unité de $\mathbb{C}$, car $|\ell(x^j)| \leq \|\ell\|$ pour tout $j \geq 0$. Or f s'annule en tous les $1/a_n$, qui forment une suite qui s'accumule en 0. D'après le principe des zéros isolés, on sait donc que $f \equiv 0$, donc que $\ell(x^j) = 0$ pour tout $j \geq 0$. Donc ℓ s'annule sur tous les polynômes qui, d'après le théorème de Weierstrass, forment un ensemble dense de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, et donc $\ell = 0$ par continuité.

⋆

Solution 3. *Hahn-Banach en dimension finie*

1. Si $x \notin \overline{C}$, alors on peut séparer (au sens strict) x du convexe fermé $\overline{C}$, et il n'y a rien à prouver.

À partir de maintenant, on considère donc $x \in \overline{C} \setminus C$, et on suppose sans perte de généralité que $0 \in C$. On suppose également, quitte à se restreindre à un sous-espace plus petit, que l'espace vectoriel engendré par C est $\mathbb{R}^d$ tout entier. On va montrer, en plusieurs étapes, que l'on peut approcher x par une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$.

— Observons déjà que $\mathring{C} \neq \emptyset$. En effet, soient $e_1, \dots, e_d$ des éléments de C qui engendrent $\mathbb{R}^d$. Alors l'ensemble
$$\left\{ \sum_{j=1}^d t_j e_j \;\middle|\; \forall 1 \leq j \leq d,\ t_j \geq 0,\ \text{et } \sum_{j=1}^d t_j \leq 1 \right\}$$
est inclus dans C, et contient une boule de $\mathbb{R}^d$ (par exemple, une boule de centre $\frac{1}{d+1}(e_1 + \cdots + e_d + 0) \in C$: soit $0 < \varepsilon < 1$ tel que $d(1+\varepsilon) < d+1$; pour tout $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in \mathbb{R}^d$ tel que $\sum_i |x_i| \leq \varepsilon$, on voit que $\frac{1}{d+1}(e_1 + \cdots + e_d + x) \in C$).

— On va maintenant prouver que si $x \in \overline{C} \setminus C$, alors $x \in \partial\overline{C}$, la frontière de $\overline{C}$ (c'est-à-dire l'ensemble $\overline{C} \setminus \mathring{\overline{C}}$). Pour cela, il suffit de montrer que $\mathring{\overline{C}} \subseteq C$ (il est fortement conseillé de faire un dessin). Soit donc $w \in \mathring{\overline{C}}$, et un point $v \in \mathring{C}$ quelconque. Quand $t \to 1^-$, $v + \frac{w-v}{t} \to w$. Donc il existe un $0 < t < 1$ tel que $u := v + \frac{w-v}{t} \in \overline{C}$. On a $w = tu + (1-t)v$. À présent, soit $r > 0$ tel que $B(v, r) \subseteq C$. Par définition de $\overline{C}$, $B(u, \frac{1-t}{t} r)$ intersecte C en un point que l'on note u'. Considérons aussi v' tel que $w = tu' + (1-t)v'$. En soustrayant les deux égalités sur w, nous obtenons donc
$$v' - v = \frac{t}{1-t}(u - u'),$$
donc $v' \in B(v, r)$, c'est-à-dire $v' \in C$. Par convexité, w est donc également dans C.

— Enfin, remarquons que la frontière de $\overline{C}$ est égale à la frontière de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$, car c'est vrai pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^d$ par double inclusion :
$$\partial(\mathbb{R}^d \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^d \setminus A} \setminus \mathring{\overline{(\mathbb{R}^d \setminus A)}} \subset (\mathbb{R}^d \setminus \mathring{A}) \setminus (\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \partial A.$$

Par conséquent, si $x \in \overline{C} \setminus C$, alors $x \in \partial\overline{C} = \partial(\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}) = \overline{\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}} \setminus \mathring{\overline{(\mathbb{R}^d \setminus \overline{C})}} \subset \overline{\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}}$. Cela achève de prouver qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$ convergeant vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n un hyperplan séparant x_n de $\overline{C}$ et e_n un vecteur unitaire tel que $H_n = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_n, y \rangle = \alpha_n\}$. La propriété de séparation signifie que
$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_n, z \rangle \leq \alpha_n \leq \langle e_n, x_n \rangle.$$

Comme la boule unité de $\mathbb{R}^d$ est compacte, et que la suite $(\alpha_n)_n$ est bornée, il existe une extraction $(n_k)_k$ telle que $e_{n_k} \to e_\infty$ un certain vecteur unitaire de norme 1, et $\alpha_{n'} \to \alpha_\infty$ un certain réel. En passant à la limite, on a donc
$$\forall z \in \overline{C},\ \langle e_\infty, z \rangle \leq \alpha_\infty \leq \langle e_\infty, x \rangle.$$
Donc l'hyperplan $H_\infty = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle e_\infty, y \rangle = \alpha_\infty\}$ sépare x de C au sens large.

2. Soit un espace E où les points peuvent être séparés de tout convexe qui ne les contient pas, et soit C un convexe quelconque dont l'adhérence est E. Supposons qu'il existe $x \in E$ qui n'est pas dans

C, et soit ℓ une forme linéaire qui sépare $\{x\}$ et C. Alors (quitte à changer ℓ en $-\ell$) il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $C \subseteq \ell^{-1}(]-\infty, \alpha])$, qui est fermé. Donc $\overline{C} \subseteq \ell^{-1}(]-\infty, \alpha])$, et $x \notin \overline{C}$, ce qui contredit l'hypothèse.

En dimension infinie, soit par exemple $E = L^1([0,1])$ muni de sa norme L^1, et $C = C^0([0,1])$. C est un convexe dense dans E. Si $f \in E \setminus C$, alors on ne peut pas séparer f de C, par densité de C.

⋆

Solution 4. *Espaces L^p, $p \in]0,1[$*

1. L'application $x \mapsto x^p$ est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc sous-additive. En effet, pour $x, y \geq 0$, on vérifie grâce au lemme des pentes que $\frac{(x+y)^p - y^p}{x^p} \leq \frac{x^p - 0}{x^p}$. On en déduit que

$$d(f,g) \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)^p dx \leq \int_0^1 (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx < +\infty,$$

donc d est bien définie. D'autre part, d est bien sûr symétrique et définie, et enfin, si $f, g, h \in L^p([0,1])$, alors $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

2. La régularité de la mesure de Lebesgue permet d'affirmer que $F : x \mapsto \int_0^x |f|^p$ est continue, croissante, vaut 0 en 0 et $\int_0^1 |f|^p$ en 1. Il suffit donc de choisir x_j tel que $F(x_j) = \frac{j}{n-1} \int_0^1 |f|^p$.

On a bien sûr

$$f = \frac{1}{n}(g_0^n + \cdots + g_{n-1}^n).$$

D'autre part, $\int_0^1 |g_j^n|^p = n^p \cdot \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \to 0$ uniformément en $j \in [\![0, n-1]\!]$. Pour n assez grand, il vient que $\forall j,\ g_j^n \in V$, puis par convexité, $f \in V$. Cela prouve que $V = L^p([0,1])$.

3. Soit $\ell \in L^p([0,1])^*$. Par continuité et linéarité, $\ell^{-1}(]-1,1[)$ est un voisinage ouvert convexe de 0 : c'est donc $L^p([0,1])$ tout entier. Cela prouve que ℓ est uniformément bornée sur $L^p([0,1])$, et comme $\ell(\lambda f) = \lambda f$ pour λ réel et f dans $L^p([0,1])$, cela entraîne que $\ell = 0$.

⋆

Solution 5. *Espaces ℓ^p, $p \in]0,1[$*

1. Pour $x, y \geq 0$, on vérifie grâce au lemme des pentes appliqué à la fonction concave $x \mapsto x^p$ que $(x+y)^p \leq x^p + y^p$, car $\frac{(x+y)^p - y^p}{x^p} \leq \frac{x^p - 0}{x^p}$. Soient $u, v, w \in \ell^p(\mathbb{N})$. On en déduit que pour tout n, $|u_n - w_n|^p \leq |u_n - v_n|^p + |v_n - w_n|^p$ et donc $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$. La positivité et la symétrie sont immédiates : d est une distance. Pour la complétude, on raisonne comme dans le cas $p \geq 1$ au moyen de suites de Cauchy.

2. Comme $d(0, u^k) = (1+k)^{pq} \to 0$ et $pq \in]p-1, 0[$, $u^k \to 0$. Comme K est formé d'une suite et de sa limite, il est compact. Considérons l'isobarycentre v^k de $u^0, \cdots, u^k$

$$v^k = \frac{u^0 + \cdots + u^k}{k+1} = \left(\frac{(1+n)^q}{(1+k)} \mathbb{1}_{n \leq k} \right)_n.$$

Alors v^k appartient à l'enveloppe convexe de K et

$$d(v^k, 0) = \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{(1+n)^q}{(1+k)} \right)^p \sim \frac{1}{1+pq} (1+k)^{1+pq-p}.$$

Mais $q > 1 - 1/p$ donc $1 + pq - p > 0$ et $d(0, v^k) \to \infty$.

Si $(\ell^p(\mathbb{N}), d)$ était localement convexe, il existerait un voisinage convexe $V \subset B_f(0,1)$. V contiendrait alors tous les u^k pour k assez grand, et par convexité, tous les $w^k = \frac{1}{k+1}(u^k + \cdots + u^{2k})$, pour k assez grand. En reprenant le même calcul, on voit que $w^k \notin B_f(0,1)$ si k est assez grand :

$$d(w^k, 0) = \sum_{n=k}^{2k} \left(\frac{(1+n)^q}{(1+k)} \right)^p \geq \frac{1}{1+pq} \frac{(1+2k)^{1+pq} - k^{1+pq}}{(1+k)^p} \to +\infty.$$

3. L'espace $(\ell^p(\mathbb{N}))^*$ est muni de la distance

$$d'(\ell, \ell') = \sup_{\substack{u \in \ell^p(\mathbb{N}) \\ d(0,u) \leq 1}} |\ell(u) - \ell'(u)|.$$

On a $\ell^\infty(\mathbb{N}) \hookrightarrow (\ell^p)^*$. En effet, soit $(u_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $\ell_u : v \in \ell^p(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n$. Soit $v \in \ell^p(\mathbb{N})$ de norme 1. Alors $|v_n| < 1$ pour tout n donc $|v_n| < |v_n|^p$ et

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n v_n \right| \leq \|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|^p \right),$$

ce qui assure la continuité de ℓ_u.

Réciproquement, soit $\ell \in (\ell^p(\mathbb{N}))^*$. On définit u par $u_n = \ell(\delta_n)$. Si par l'absurde il existait une extraction $(n_k)_k$ telle que $|u_{n_k}| \to +\infty$, alors $1 = \ell(\delta_{n_k}/u_{n_k})$ alors que $\delta_{n_k}/u_{n_k} \to 0$, donc ℓ ne serait pas continue (rappelons que l'on a défini une métrique sur $(\ell^p(\mathbb{N}))^*$). Ainsi, $u_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Enfin, si $\ell = \ell_v$ et $\ell' = \ell_{v'}$, on peut montrer que

$$d'(\ell, \ell') = \sup_n |v_n - v'_n|.$$

L'isomorphisme $v \mapsto \ell_v$ est donc bicontinu.

⋆

Solution 6. *Limite de Banach*

1. On a bien sûr $\|\Lambda_n\| \leq 1$. En particulier, pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, $(\Lambda_n(u))_n$ est une suite du borné $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$: ainsi p est bien définie. L'homogénéité est immédiate. De plus :

$$p(u+v) = \limsup_n (\Lambda_n(u) + \Lambda_n(v)) \leq \limsup_n \Lambda_n(u) + \limsup_n \Lambda_n(v) = p(u) + p(v).$$

2. Soit $F = \{u \in \ell^\infty | \Lambda_n(u) \text{ admet une limite}\}$ l'ensemble des suite Cesarò-convergentes. On définit Λ sur F par

$$\Lambda(u) := \lim_{n \to \infty} \Lambda_n(u)$$

On a bien sûr que $\Lambda(u) = p(u)$ sur F. Grâce au théorème de prolongement de Hahn-Banach, on peut étendre Λ à ℓ^∞ en une forme linéaire vérifiant pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$,

$$\Lambda(u) \leq p(u).$$

On voit alors que pour tout $u \in \ell^{\infty(\mathbb{N})}$, en raisonnant avec u et $-u$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \Lambda_n(u) \leq \Lambda u \leq \limsup_{n \to +\infty} \Lambda_n(u),$$

donc en particulier Λ est continue, de norme 1. De plus :

$$\Lambda_n(S_g u - u) = \frac{u_{n+1} - u_0}{n+1} \to 0$$

donc $\Lambda(S_g u - u) = 0$ et $\Lambda S_g u = \Lambda u$.

3. Non, bien entendu. Notre construction définit Λ de manière unique sur F qui est fermé. On considère la suite u définie par $u_n = 1$ si n est dans un intervalle $[\![2^{2k}+1, 2^{2k+1}]\!]$ (de longueur 2^{2k}) pour un entier k, $u_n = 0$ sinon. On voit que

$$\Lambda_{2^{2k}}(u) = \frac{1}{2^{2k}+1}(2^{2k-2} + 2^{2k-4} + \cdots + 1) = \frac{2^{2k-2}}{2^{2k}+1}(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + \cdots + 2^{-2k+2}) \to \frac{1}{3}$$

et

$$\Lambda_{2^{2k+1}}(u) = \frac{1}{2^{2k+1}+1}(2^{2k} + 2^{2k-2} + \cdots + 1) = \frac{2^{2k}}{2^{2k+1}+1}(1 + 2^{-2} + \cdots + 2^{-2k}) \to \frac{2}{3}$$

lorsque k tend vers $+\infty$, donc $\liminf \Lambda_n(u) \leq \frac{1}{3}$ et $\limsup \Lambda_n(u) \geq \frac{2}{3}$. En choisissant $\Lambda(u) \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ arbitrairement, et en étendant Λ à partir de $\mathbb{R}u \oplus F$ par Hahn-Banach, on obtient une infinité de limites de Banach différentes.

⋆

Solution 7. *Adhérence de la sphère unité pour la topologie faible*

1. Soit x, y deux points distincts de E. On cherche à construire deux voisinages ouverts U et V de x et de y pour la topologie faible tels que $U \cap V = \emptyset$. D'après le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique), il existe $f \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) < \alpha < f(y).$$

Il suffit de poser $U = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ et $V = f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$.

Remarque : On voit avec la preuve ci-dessus que la topologie faible est séparée dès que le dual topologique E^* de E sépare les points de E, ce qui est en fait le cas d'après le théorème de Hahn-Banach en supposant seulement que E est un espace localement convexe.

2. Tout voisinage faible de E est le translaté d'un voisinage faible de 0, donc il suffit de montrer que tout voisinage faible de 0 contient une droite. Un tel voisinage contient une intersection finie d'ensembles du type $\{x \in E; |\ell(x)| < \alpha\}$, pour un certain $\ell \in E^*$, et $\alpha > 0$. Il suffit donc de montrer qu'une intersection finie d'hyperplans de E n'est pas réduite à $\{0\}$. Si on avait $\bigcap_{j=1}^N \ker \ell_j = \{0\}$, où $\{\ell_j\}_{1 \leq j \leq N}$ est une famille finie de E^*, considérons l'application $\Phi : x \in E \mapsto (\ell_1(x), \ldots, \ell_N(x)) \in \mathbb{R}^N$. Alors Φ est injective, vu la condition sur les noyaux, et donc $\dim E \leq N$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur la dimension de E. Il existe donc $x \in \bigcap_{j=1}^N \ker \ell_j \setminus \{0\}$, et alors $x\mathbb{R} \subset \bigcap_{j=1}^N \ell_j^{-1}(]-\alpha_j, \alpha_j[)$, quel que soit $\alpha_j > 0$.

3. Si $\|x\| < 1$, tout voisinage faible de x contient une droite D passant par x ; notons u un vecteur directeur de D. Cette droite coupe nécessairement S (grâce au théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à $t \mapsto \|x + tu\|$). Donc tout voisinage faible de x intersecte S (c'est également vrai si $\|x\| = 1$). Remarquons que l'on vient de montrer que $\{x \in E; \|x\| < 1\}$ n'est pas ouvert pour la topologie faible.

4. Soit $\overline{S}^*$ l'adhérence faible de S. Pour x dans le complémentaire de $\overline{S}^*$, il existe un voisinage faible de x n'intersectant pas S, donc par ce qui précède x est dans le complémentaire de B ; cela prouve que $S \subseteq B \subseteq \overline{S}^*$. Il suffit à présent de montrer que B est un fermé faible, et on aura $B = \overline{S}^*$. Pour cela, on montre que $E \setminus B$ est un ouvert faible. Soit $x \notin B$. Alors d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut séparer strictement $\{x\}$ du convexe fermé (fort) B. Il existe $\ell \in E^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall y \in B$, $\ell(y) < c < \ell(x)$. Alors l'ouvert faible $\ell^{-1}(]c, +\infty])$ contient x, et n'intersecte pas B : cela prouve donc que $E \setminus B$ est un ouvert faible.

⋆