Indications pour le Td n° 2 d'EDP

Autour du front d'onde

Séance du 10 octobre 2014

Solution 1. *Calcul de deux intégrales oscillantes*

1. La forme $(y,x) \mapsto y.x$ est bien une forme quadratique non dégénérée, et $a \in A^m$ donc l'intégrale est bien définie au sens des intégrales oscillantes. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 au voisinage de 0. On a

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(y)dydx = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(y)\phi(\varepsilon x)\phi(\varepsilon y)dydx.$$

On fait le changement de variables $\eta = \varepsilon x$, $\varepsilon\zeta = y$, et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iy.x}a(y)\phi(\varepsilon x)\phi(\varepsilon y)dydx = & \quad \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i\eta.\zeta}a(\varepsilon\zeta)\phi(\eta)\phi(\varepsilon^2\zeta)d\zeta d\eta \\ =&\frac{1}{(2\pi)^n}\int a(\varepsilon\zeta)\phi(\varepsilon^2\zeta)\hat{\phi}(\zeta)d\zeta \\ \longrightarrow & a(0)\phi(0)\frac{1}{(2\pi)^n}\int\hat{\phi}(\zeta)d\zeta = a(0).\end{aligned}$$

2. On fait le même changement de variable que dans la question précédente et on remarque

$$\int \eta^\beta e^{-i\eta.\zeta}\phi(\eta)d\eta = (-i)^\beta D_\zeta^\beta\hat{\phi}(\zeta).$$

⋆

Solution 2. *Paramétrice d'un problème elliptique*

1. On a $\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x) \in A^{-m}$ donc $\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi$ a un sens au sens des intégrales oscillantes.

2. On a

$$-\frac{ix}{|x|^2}.\nabla_\xi e^{ix.\xi} = e^{ix.\xi}$$

et donc, comme sur le support de u on a $x \neq 0$, en faisant $n+1-m$ intégrations par parties on obtient

$$\begin{aligned}&|\int e^{ix.\xi}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}u(x)dxd\xi| \\ \leq& C\int_U |u(x)|dx\int\left|\partial^{n+1-m}\frac{1-\chi(\xi)}{P(\xi)}\right|d\xi \\ \leq& C'\|u\|_{L^2}\int\frac{1}{(1+|\xi)^{n+1}}d\xi \\ \leq& C'\|u\|_{L^2}\end{aligned}$$

Le théorème de Riesz nous dit donc que T s'identifie à une fonction de $L^2(U)$.

3. En faisant p intégrations par parties supplémentaires, on voit que $\partial^\alpha T$ avec $|\alpha| = p$ s'identifie aussi à une fonction de $L^2(U)$. Ainsi T s'identifie à une fonction de $H^m(U)$ pour tout m et donc à une fonction $C^\infty(U)$. Comme c'est valable sur tout ouvert ne contenant pas 0, $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

4. On a

$$< P(D)T, u >= \int e^{ix.\xi}(1 - \chi(\xi))u(x)dxd\xi = u(0) + \int e^{ix.\xi}\chi(\xi)u(x)dxd\xi$$

donc

$$P(D)T = \delta + r,$$

où

$$r = \int e^{ix.\xi}\chi(\xi)d\xi \in C^\infty.$$

5. Soit $\phi \in C_c^\infty(B(0,\varepsilon))$ telle que $\phi = 1$ au voisinage de 0. On a

$$P(D)(\phi T) = \delta + \phi r + [P(D), \phi]T.$$

Comme $[P(D), \phi] = 0$ au voisinage de 0, $[P(D), \phi]T \in C^\infty$, donc on peut choisir ϕT comme paramétrice.

⋆