Correction du Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolutions

Séance du 7 mars 2014

Solution 1. *Petit calculs de convolutions*

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$< H', \phi >= - < H, \phi' >= - \int_0^\infty \phi'(x) = \phi(0).$$

2. • δ_a est à support compact, il n'y a pas de problème pour calculer :

$$(\delta_a * H)' = (\delta_a * \delta_0) = \delta_a,$$

donc $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x \geq a}$. On peut aussi remarquer que $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x - a)$.

• On calcule : $\delta' * \mathbb{1} = (\delta * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Il faut remarquer que si $m > n$, $x^m \delta_0^{(n)} = 0$ (calcul sur une fonction test). Par ailleurs, on calcule pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(x^m \delta_0^{(n)}, \psi) &= (\delta_0^{(n)}, x^m \psi(x)) = (x^m \psi)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n C_n^m m! \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^n A_n^m \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m (\delta_0^{(n-m)}, \psi).\end{aligned}$$

Et ainsi, $x^m \delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors que :

$$x^m \delta_0^{(n)} * x^p \delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)}.$$

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'$, il n'y a pas de problème. Ensuite :

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}'_{[a,b]} * \mathbb{1}'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• $T * \mathbb{1}$ est une distribution bien définie car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$(T * \mathbb{1}, \psi) = (T, \check{\mathbb{1}} * \psi) = (T, \mathbb{1} * \psi) = \int \psi \cdot (T, \mathbb{1}).$$

Ainsi, $T * \mathbb{1} = (T, \mathbb{1})\mathbb{1}$ est une distribution constante.

• $T * \exp$ est bien définie comme précédemment. On calcule :

$$\begin{aligned}(T * \exp, \psi) = (T, \check{\exp} * \psi) = (T, x \mapsto \int \exp(y - x)\psi(y)dy) \\ = \int \psi(y) e^y dy (T, \exp(-x)).\end{aligned}$$

Et donc $T * \exp = (T, \exp(-x)) \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T*\exp)' = T*\exp$, donc on a que $T*\exp = C\exp$. Ensuite, on calcule :

$$C = (T * \exp)(0) = (T, \check{\exp}) = (T, \exp(-x)).$$

3. $(\mathbb{1}*\delta')*H = 0*H = 0$ et $\mathbb{1}*(\delta'*H) = \mathbb{1}*\delta = \mathbb{1}$. Ainsi, si deux des trois distributions ne sont pas à support compact, on n'a pas nécessairement l'associativité de la convolution.

4. On veut en fait :

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - u(\cdot - 1) = \delta_0'.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k'.$$

Calculons alors $\delta_a' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k'$, alors :

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Comme $T_n \rightharpoonup u$, $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Solution 2. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Comme $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, $y \mapsto |\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)| \in L^p_y$ et :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^{1/p'}|\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)|.$$

On intègre en y et on applique Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)|dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|_{L^1}^{1/p'} \left(\int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Bien sûr, $\|\phi(x-\cdot)\|_{L^1} = \|\phi\|_{L^1}$ et donc (par Fubini-Tonelli) :

$$\begin{aligned}\|\phi*\psi\|_{L^p}^p &\leq \|\phi\|_{L^1}^{p/p'} \int\int |\phi(x-y)||\psi(y)|^p dy dx \\ &= \|\phi\|_{L^1} p/p' \int \|\phi(\cdot - y)\|_{L^1_x}|\psi(y)|^p dy = \|\phi\|_{L^1}^p \|\psi\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Comme $\|\phi_m\|_{L^1} = 1$, et $\mathrm{Supp}(\phi_m) \subset B(0, 1/m)$:

$$(\phi_m * f)(x) - f(x) = \int_{|y|\leq 1/m} m^n \phi(my)(f(x-y) - f(y))dy.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\phi_m * f)(x) - f(x)| \leq \sup_{y:|y-x|\leq 1/m} |f(x) - f(y)|.$$

Comme f est continue, sur K compact, elle est uniformément continue sur $\overline{K + B(0,1/m)}$ compact et $\sup_{y\in\overline{K+B(0,1/m)}:|y-x|\leq 1/m} |f(x) - f(y)| \to 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$. On vérifie que les calculs de 1. s'appliquent si on a seulement $\psi \in L^p$. Alors :

$$\|\phi_m * (f-g)\|_{L^p} \leq \|\phi_m\|_{L^1}\|f-g\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Ensuite, vu que $\mathrm{Supp}(\phi_m * g) \subset \mathrm{Supp}(\phi_m) + \mathrm{Supp}(g) \subset B(0,1) + \mathrm{Supp}(g) = K$ (compact fixé), on a $\|\phi_m * g - g\|_{L^\infty} \to 0$ et donc $\|\phi_m * g - g\|_{L^p} = \|\phi_m * g - g\|_{L^p(K)} \to 0$). Finalement, pour m assez grand :

$$\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \leq \|\phi_m(f-g)\|_{L^p} + \|\phi_m * g - g\|_{L^p} + \|g-f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

Et donc $\|\phi_m * f - f\|_{L^p} \to 0$. Pour L^∞, il ne peut y avoir convergence (sur les compacts) que si f est continue. Si $f \in C_0$, il y a convergence uniforme.

On voit facilement que $\phi_m * f$ est C^∞ (dérivation sous le signe somme). Ensuite, soit $\chi \in \mathcal{D}(B(0,2)$ tel que $\chi|_{B(0,1)} = 1$. On pose $f_{n,m}(x) = \chi(x/n)(\phi_m * f)(x) \in \mathcal{D}$. Bien sur, pour tout m, $f_{n,m} \to \phi_m * f$ dans L^p, donc par un argument diagonal si on pose $f_m = f_{n(m),m}$ avec $n(m)$ tel que $\|f_{n(m),m} - \phi_m * f\|_{L^p} \leq 1/m$, on a que $f_m \to f$ dans L^p. Ainsi, $\mathcal{D}$ est dense dans L^p (et $\overline{\mathcal{S}}^{L^\infty} = C_0$).

3. Soit a tel que $p = aq'$. On a :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^a|\phi(x-y)|^{1-a}|\psi(y)|.$$

Et par Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)|dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|^a_{L^{aq'}}\left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q}|\psi(y)|^q dy\right)^{1/q}.$$

On pose $\tilde{\psi} = \psi/\|\psi\|_{L^q}$, alors $\tilde{\psi}^q dy$ est une mesure de masse 1, donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen (avec $x \mapsto x^{r/q}$ convexe car $q \leq r$) :

$$\left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q}\frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}}\right)^{r/q} \leq \int |\phi(x-y)|^{(1-a)r}\frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}}.$$

Mais $p = aq'$ donc $a/p = 1 - 1/q$, $(1/p - a/p)r = 1$ et $(1-a)r = p$. Donc :

$$|\phi * \psi(x)|^r \leq \|\phi\|^{ar}_{L^p}\|\psi\|^{r-q}_{L^q}\int |\phi(x-y)|^p|\psi(y)|^q dy.$$

Enfin, en intégrant en x, avec Fubini-Tonelli :

$$\|\phi * \psi\|^r_{L^r} \leq \|\phi\|^{ar+p}_{L^p}\|\psi\|^{r-q+q}_{L^q} = \|\phi\|^r_{L^p}\|\psi\|^r_{L^q}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}$ dans les espaces L^p, L^q (avec la même estimée).

⋆

Solution 3. *Fonction test*

1. On a $(u * H_a)' = \frac{1}{a}u * (\delta - \delta_a) = \frac{1}{a}(u(x) - u(x-a))$, donc si $u \in C^k$ alors $u * H_a \in C^{k+1}$.

2. On a $\int u * H_a dx = \int u(y)H_a(x-y)dxdy = \int u(y)$, car $\int H_a(x-y)dx = 1$.

3. Il suffit de vérifier que $H_{a_0} * H_{a_1}$ est continue, et d'appliquer la question 1. Le support de $H_{a_0} * ... * H_{a_n}$ est inclus dans la somme des supports, c'est à dire dans $[0, a_0 + ... + a_n]$.

4. On calcule

$$(H_{a_0} * ... * H_{a_n})^{(j)} = \frac{1}{a_0 ... a_{j-1}} (\delta - \delta_{a_0}) * .. * (\delta - \delta_{a_{J-1}}) * H_{a_j} * ... * H_{a_n}.$$

On a donc 2^j termes de la forme

$$\delta_a * H_{a_j} * ... * H_{a_n},$$

or $\|H_{a_j} * ... * H_{a_n}\|_{L^\infty} \leq \|H_{a_j}\|_{L^\infty} \|H_{a_{j+1}} * .. * H_{a_n}\|_{L^1}$ et on a $\|H_{a_{j+1}} * .. * H_{a_n}\|_{L^1} = 1$ d'après la question 2 et $\|H_{a_j}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{a_j}$.

5. On montre d'abord que u_n est de Cauchy dans L^infty.

$$\begin{aligned} |u_n - u_{k+n}| &= |u_n - u_n * H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}| \\ &= |\int H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}(y)(u_n(x-y) - u_n(x))dy| \\ &\leq \int H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}(y) \|u_n'\|_{L^\infty} |y| dy \end{aligned}$$

Comme sur le support de $H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}$ on a $|y| \leq a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ on obtient

$$|u_n - u_{k+n}| \leq \frac{2}{a_0 a_1}(a_{n+1} + ... + a_{n+k}).$$

Comme la somme des a_i est convergente, u_n est de Cauchy dans L^∞. On procède de la même manière pour les dérivées. u_n converge donc uniformément vers une fonction C^∞, à support dans $[0, \sum a_i]$. L'intêret de cette construction est de nous donner des bornes sur les dérivées de u.

6. Une telle fonction serait analytique, ce qui empêche d'être à support compact.

7. Soit ϕ une fonction plateau. On pose $g_n = b_n \phi(\frac{x}{\epsilon_n}) \frac{x^n}{n!}$. On veut montrer que pour ϵ_n assez petit, et $\alpha < n$

$$\|g_n^{(\alpha)}\| \leq 2^{-n}$$

Sur $\mathbb{R} -] - \epsilon_n; \epsilon_n[$, g_n est identiquement nulle donc l'inégalité est vérifiée. Il suffit de montrer que, pour ϵ_n assez petit, elle est aussi vérifiée sur $] - \epsilon_n; \epsilon_n[$.

Par la formule de dérivée des produits :

$$g_n^{(\alpha)}(x) = b_n \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \frac{1}{\epsilon_n^s} \phi^{(s)} \left(\frac{x}{\epsilon_n} \right) \frac{x^{n-(\alpha-s)}}{(n-(\alpha-s))!}$$

Donc, lorsque $|x| < \epsilon_n$:

$$|g_n^{(\alpha)}(x)| \leq |b_n| \epsilon_n^{n-\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \left| \phi^{(s)} \left(\frac{x}{\epsilon_n} \right) \right| \frac{1}{(n-\alpha+s)!}$$

La fonction $\phi^{(s)}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle est à support compact). Pour tout $\alpha < n$, le terme précédent tend donc vers 0 uniformément en x lorsque $\epsilon_n \to 0$. En particulier, si on choisit ϵ_n asse petit, on peut avoir $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tout $\alpha < n$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n g_n^{(\alpha)}$ converge alors normalement. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout α :

$$f^{(\alpha)} = \sum_n g_n^{(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \qquad f^{(\alpha)}(0) = g_\alpha^{(\alpha)}(0) = b_\alpha$$

En effet, pour tout n, $g_n(x) = b_n \frac{x^n}{n!}$ au voisinage de 0 donc $g_n^{(\alpha)}(0) = b_n$ si $\alpha = n$ et 0 sinon.

$\star$

Solution 4. *Equations différentiellelles*

1. L'application $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est propre. Donc la convolution de deux éléments de $\mathcal{D}'_+$ est bien définie. De plus si $u, v \in \mathcal{D}'_+$ alors le support de $u * v$ est inclus dans l'image de F, c'est à dire dans $\mathbb{R}^+$.

2. Il suffit de faire le cacul :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\ &= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda(H(t)e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. On pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) &= \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) \\ = \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} &+ H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!}.\end{aligned}$$

Ce qui assure l'hérédité de la récurrence.

4. On considère l'EDO $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = \delta_0$. Alors on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme :

$$\left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0.$$

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc :

$$\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k} = \bigstar_i(\delta' - \lambda_i\delta)^{n_i}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right)^{*-1} = \bigstar_i\left(H(t)\frac{t^{n_i-1}e^{\lambda_i t}}{(n_i-1)!}\right).$$

$\star$