# Correction du Td n° 4 d'Analyse fonctionnelle

## Opérateurs compacts – Espaces de Hilbert

Séance du 6 Mars 2015

**Solution 1.** *Convergence faible dans un Hilbert*

1. On note $x^p = \lim_n (e_p|x_n)$. On a $(\sum_{i=1}^k x^p e_p, x_n) \to \sum_{i=1}^k |x^p|^2$ donc par Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \left\| \sum_{i=1}^k x^p e_p \right\| \|x_n\|.$$

Soit : $\sum_{i=1}^k |x^p|^2 \leq \liminf \|x_n\|^2$. Ainsi, $\sum |x^p|^2 < \infty$, on pose $x = \sum x^p e_p$. Pour tout $p$, $(e_p, x_n) \to (e_p, x)$. Considérons $F = \{y \in H | (y, x_n) \to (y, x)\}$. $F$ est un s.e.v. fermé fort (car $x_n$ est bornée), dense (car il contient $e_n$), donc $F = H$ et $x_n \rightharpoonup x$.

Comme $(e_p, e_n) = \delta_{n,p} \to 0$ quand $n \to +\infty$ pour tout $p$, on a $e_n \rightharpoonup 0$.

2. Montrons que l'adhérence faible de $\mathbb{S}$ est la boule unité fermée $\mathbb{B} = \{x | \|x\| \leq 1\}$. Tout d'abord, $\mathbb{B}$ est convexe fermé fort, donc fermé faible, et comme $\mathbb{S} \subset \mathbb{B}$, $\overline{\mathbb{S}}^w \subset \mathbb{B}$.

Pour l'inclusion inverse, rappelons que la boule unité muni de la topologie faible est métrisable, donc l'adhérence faible de $\overline{\mathbb{S}}^w$ est en fait l'adhérence séquentielle faible de $\mathbb{S}$. La suite $e_n \rightharpoonup 0$, donc $0 \in \overline{\mathbb{S}}^w$. Soit Ensuite $x \in \mathbb{B}$, on pose $x_n = x + \alpha_n e_n$, où $\alpha_n$ est tel que $\|x_n\| = 1$ ($\alpha_n = -(x, e_n) + \sqrt{(x, e_n)^2 - \|x\|^2 + 1}$). Ainsi, $(x_n, e_p) = (x, e_p)$ pour $n > p$, et comme à la question précédente, $x_n \rightharpoonup x$. Finalement $x \in \overline{\mathbb{S}}^w$, et $\overline{\mathbb{S}}^w = \mathbb{B}$.

3. Rappelons que $e_n \rightharpoonup 0$. Supposons que $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightharpoonup 0$. Si $m_k$ est bornée, quitte à extraire on peut supposer $m_k$ constant, valant $m$. Si $n_k$ est elle aussi bornée, on peut la supposer constante : la convergence faible vers 0 est alors absurde. Sinon, $m e_{n_k} \rightharpoonup 0$ et on a convergence faible vers $e_m \neq 0$. Enfin, si $m_k$ n'est pas bornée, la suite n'est pas bornée (en norme) : elle ne converge pas faiblement, ce qui est contradictoire. En effet, dans un e.v.n. $E$, si $x_n \rightharpoonup x$ alors $(x_n)$ est bornée : on considère les formes linéaires sur $E'$ $\varphi_n : \ \ell \mapsto \ell(x_n)$. $\varphi_n$ est de norme $\|x_n\|$. Si $\|x_n\| \to \infty$, par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $\ell$ tel que $\sup |\varphi_n(\ell)| = \infty$, mais $\varphi_n(\ell) = \ell(x_n) \to \ell(x)$ par convergence faible.

Ainsi 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible. Par contre $e_n$ y appartient, et comme $e_n \rightharpoonup 0$, 0 est dans la double adhérence.

On n'est certainement pas dans un cadre métrique.

⋆

**Solution 2.** *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | T e_n)$, donc $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p | T e_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \|T e_n\|^2,$$

car $(f_p)$ est une base hilbertienne de $G$ (tous les termes son positifs, ce qui autorise é faire les calculs). Étant donné une autre base hilbertienne $(\tilde{e}_n)$ de $H$, on a également que $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraine que $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 < \infty$ et l'égalité demandée.

2. Soit $u_n$ une suite bornée de $H$. Quitte à extraire, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H$-faible. On note $u_n = \sum_m a_{n,m} e_m$. Par convergence faible, on a que pour tout $m$, $a_{n,m} \to a_m$ quand $n \to \infty$, et que $u = \sum_m a_m e_m$. Comme la suite $u_n$, donc $u_n - u$, est bornée, il existe $C$ tel que pour tout $n$,

$$\sum_m |a_{nm} - a_m|^2 \leq C.$$

Par continuité de $T$, $Tu_n = \sum_m a_{n,m} Te_m$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $M$ tel que $\sum_{m \geq M} \|Te_m\|^2 \leq \varepsilon / C$, et $N$ tel que pour $n \geq M$,

$$\sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu\|^2 &= \left\| \sum_m (a_{n,m} - a_m) Te_m \right\|^2 \\
&\leq \left| \sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 + \left| \sum_{m \geq M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 \\
&\leq \sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m<M} \|Te_m\|^2 + \sum_{m \geq M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m \geq M} \|Te_m\|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2} \|T\|_{HS}^2 + C \frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc $Tu_n \to Tu$ dans $H$ fort. $T$ est donc compact.

Réciproquement il existe des opérateurs $T$ compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple la multiplication $M_a$ avec $a_n = \frac{1}{1 + \ln n}$ $(n \geq 1)$.

3. Vérifier en prenant des produits scalaires avec $e_n$

4. Soit $T$ un opérateur de Hilbert-Schmidt, on pose $Te_n = \sum_m a_{n,m} e_m$ et

$$K(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} e_n(x) e_m(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ car $T$ est de Hilbert-Schmidt ($\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} a_{nm}^2 = \|T\|_{HS}^2 < \infty$). Par construction, $T_K$ vérifie que pour tout $p, q$, $(T_K e_p | e_q) = a_{p,q}$ et donc $T_K e_p = Te_p$. $T_K$ est continue sur $L^2(\Omega)$ et coincide avec $T$ sur $\mathrm{Vect}(e_n)$ qui est dense, donc est égal à $T$.

Supposons que $Tf = \int K_1 f = \int K_2 f$. Alors l'opérateur é associé à $K_1 - K_2$ est nul donc $0 = \|T_{K_1 - K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$ et $K_1 = K_2$.

⋆

**Solution 3.** *Théorème de Krein Rutman*

1. On procède par l'absurde. Supposons qu'il existe $x_n \in C$ telle que

$$\|x_n + u\| \leq \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n \longrightarrow -u$, mais comme $C$ est fermé, $-u \in C$ ce qui est absurde.

2. $Tu \in IntC$ doc il existe $\rho$ tel que $B(Tu, \rho) \subset IntC$ donc $r = \frac{\rho}{\|u\|}$ convient.

3. On suppose $T(x+u) = \lambda x$ pour un certain $x$ dans $C$. Comme $x + u \in C \setminus \{0\}$, on sait alors que $\lambda \geq 0$. Ensuite $\lambda x - T(u) = T(x) \in C$, donc $\lambda x - T(u) + T(u) - ru \in C$ donc $\frac{\lambda}{r}x - u \in C$. Supposons maintenant $\frac{\lambda^n}{r^n}x - u \in C$. Alors $\frac{\lambda^n}{r^n}T(x) - T(u) \in C$ donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) \in C$ donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) + T(u) - ru + \frac{\lambda^n}{r^n}T(u) \in C$ donc $\frac{\lambda^{n+1}}{r^{n+1}}x - u \in C$. Si $\lambda < r$, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on obtient $-u \in C$ ce qui est absurde.

4. On considère l'application $\Phi : C \to C$, $x \mapsto T(\frac{x+u}{\|x+u\|})$. D'après la question 1, cette application est continue sur $C$. Par ailleurs $\Phi(C) \subset T(B_1)$ est relativement compact. On peut donc appliquer le théorème de Scauder, qui nous donne l'existence d'un point fixe

$$T(x+u) = \|x+u\|x.$$

D'après la question précédente, $\|x+u\| \geq r$.

5. On obtient de la même manière, pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un $x_\varepsilon \in C$ tel que

$$T(x_\varepsilon + \varepsilon u) = \|x_e + \varepsilon u\|x_\varepsilon. \tag{1}$$

On pose $\lambda_\varepsilon = \|x_e + \varepsilon u\| \geq r$, avec $r$ indépendant de $\varepsilon$ (en reprenant la question 1, on a $B(T(\varepsilon u), \varepsilon\rho) \subset IntC$ et $r = \frac{e\rho}{\varepsilon\|u\|} = \frac{\rho}{\|u\|}$ convient). Par ailleurs

$$\|x_e + \varepsilon u\|\|x_\varepsilon\| \leq \|T\|\|x_e + \varepsilon u\|$$

donc $\|x_e\| \leq T$ et $\lambda_e \leq \|T\| + \varepsilon\|u\|$. Quitte à extraire, on peut donc supposer

$$\lambda_e \longrightarrow \mu_0$$

et par compacité de $T$

$$T(x_e) \longrightarrow x_0 \in C$$

D'après (1) on obtient donc

$$x_\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{\mu_0}x_0$$

et par conséquent

$$T(x_0) = \mu_0 x_0.$$

6. Par convexité de $C$, comme $-x \notin C$, il existe $\sigma$ tel que $\alpha x_0 - (1-\alpha)x \in C$ pour $\sigma \leq \alpha \leq 1$ et $\alpha x_0 - (1-\alpha)x \notin C$ pour $\sigma > \alpha \geq 0$. On a

$$T(\sigma x_0 - (1-\sigma)x) = \sigma\mu_0 x_0 - (1-\sigma)\mu x$$

Si $x_0$ et $x$ ne sont pas alignés, on a $\sigma x_0 - (1-\sigma)x \in C \setminus \{0\}$, donc $\sigma\mu_0 x_0 - (1-\sigma)\mu x \in IntC$ donc $\mu < \mu_0$. En inversant les roles de $\mu$ et $\mu_0$, on obtient l'inégalité inverse donc $x_0$ et $x$ sont alignés (et $\mu = \mu_0$).

7. On peut supposer $x \notin C$ et $-x \notin C$ (sinon il suffit d'appliquer la question précédente). Il existe $\sigma$ tel que $\alpha x_0 + (1-\alpha)x \in C$ pour $\sigma \leq \alpha \leq 1$ et $\alpha x_0 + (1-\alpha)x \notin C$ pour $\sigma > \alpha \geq 0$. On a donc

$$T(\sigma x_0 + (1-\sigma)x) = \sigma\mu_0 x_0 + (1-\sigma)\mu x$$

et donc $\mu < \mu_0$.

⋆