Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faible et faible-$*$ (2)

Séance du 20 février 2017

Solution 1. *Échauffement*

Soit $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E^* bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\ell_n\|_{E^*} \leq C$). Soit également $\{x_p\}$ une suite dense de E. Alors la suite $\{\ell_n(x_1)\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, et on peut donc trouver une extraction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\ell_{\varphi_1(n)}(x_1) \to r_1 \in \mathbb{R}$. On considère ensuite $\{\ell_{\varphi_1(n)}(x_2)\}$, qui est également bornée, et l'on trouve φ_2 telle que $\ell_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(x_2)$ ait une limite r_2.

Semblablement, on construit par récurrence une suite d'extractions $\{\varphi_j\}$ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r_j \in \mathbb{R}.$$

On définit alors l'extraction *diagonale* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto (\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n)(n)$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, $\ell_{\psi(n)}(x_j) \to r_j$, car c'est une suite extraite de $\{\ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j)\}$ dès que $n \geq j$.

Pour $x \in E$ quelconque, on définit $f(x)$ par

— $f(x) = r_j$, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_j$.

— dans le cas contraire, on trouve $\{p_k\}$ tel que $x_{p_k} \to x$. Alors $\{r_{p_k}\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{N}$, donc elle converge vers un certain nombre, noté $f(x)$, et qui ne dépend pas de l'extraction $\{p_k\}$ choisie. Une simple inégalité triangulaire montre que $\ell_{\psi(n)}(x) \to f(x)$.

L'application f ainsi obtenue est bien sûr linéaire. Elle est aussi continue car

$$|f(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\ell_{\psi(n)}(x)| \leq \limsup_{n\to+\infty} \|\ell_{\psi(n)}\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|.$$

Enfin, la convergence faible-$*$ de $\ell_{\psi(n)}$ vers f est vérifiée, comme nous l'avons observé plus haut.

⋆

Solution 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Rappelons que, d'après la formule de Parseval, $e_n \rightharpoonup 0$ (et ce quelle que soit la base hilbertienne de H considérée). Supposons qu'il existe deux suites d'entiers $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ telles que $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightharpoonup 0$.

- Premier cas : si m_k est bornée, quitte à extraire de nouveau, on peut supposer m_k constant, valant m. Alors n_k est nécessairement non bornée (sans quoi la suite ci-dessus ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs non nulles), et donc $me_{n_k} \rightharpoonup 0$. Ainsi $e_m + me_{n_k} \rightharpoonup e_m \neq 0$, c'est contradictoire.
- Second cas : si m_k n'est pas bornée, alors $\|e_{m_k} + m_k e_{n_k}\| \geq m_k - 1$, donc la suite n'est pas bornée en norme. Elle ne saurait donc converger faiblement, car on sait (par Banach-Steinhaus) que si $x_n \rightharpoonup x$ dans un espace vectoriel normé, alors $\{x_n\}$ est fortement bornée.

Cela prouve que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible. Par contre, e_m y appartient pour tout $m \in \mathbb{N}$ (comme limite faible de $e_m + me_n$ quand $n \to +\infty$), et comme $e_m \rightharpoonup 0$, 0 est dans la « double » adhérence. Cela prouve en particulier que l'adhérence séquentielle faible d'un ensemble n'est pas, en général, faiblement fermée.

⋆

Solution 3. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

1. Soit $\{x_n\}$ une famille dénombrable dense de E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fabrique (grâce au théorème de Hahn-Banach) une forme linéaire $\ell_n \in E^*$ de norme 1, et telle que $\ell_n(x_n) = \|x_n\|$. Montrons qu'alors $\{\ell_n\}$ sépare les points. En effet, si $x \in E$ est tel que $\ell_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, trouvons une suite d'entiers tels que $x_{n_k} \to x$ quand $k \to +\infty$. Alors

$$\|x_{n_k}\| = |\ell_{n_k}(x_{n_k} - x)| \leq \|\ell_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k} - x\| = \|x_{n_k} - x\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0,$$

donc $x_{n_k} \to 0$, et ainsi $x = 0$.

2. Soient A un compact faible et $\{\ell_n\}$ cette famille séparante ; on peut supposer que $\|\ell_n\| = 1$. On pose

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |\ell_n(x-y)|.$$

L'application d vérifie toutes les propriétés d'une distance. Ensuite, rappelons que, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, A, en tant que compact donc borné faible, est borné pour la norme : il existe $C > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\|a\| \leq C$. La topologie induite sur A par d est donc moins fine que la topologie faible : en effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=n+1}^{\infty} C2^{-j} \leq \varepsilon/2$; ainsi $\{x \in A \mid |\ell_j(x)| \leq (n+1)^{-1}\varepsilon, \forall j \leq n\} \subset B_d(0, \varepsilon)$. Cela signifie donc que l'application id : $(A, \sigma(E, E^*)) \to (A, d)$ est bijective, continue, partant d'un compact. C'est donc un homéomorphisme, *i.e.* les deux topologies coïncident.

3. L'adhérence forte ou faible est la même dans le cas d'un convexe : F est donc un Banach (fermé dans un Banach). Alors $A \cap F$ est compact pour la topologie faible sur F : en effet, la topologie faible est bien la topologie induite par la topologie forte sur E, car si V est un voisinage faible de 0 pour $\sigma(F, F^*)$, alors il existe $\ell_1, \ldots, \ell_N \in F^*$, et $\varepsilon > 0$ tels que V contienne l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{N} \{x \in F \mid |\ell_n(x)| < \varepsilon\}$, et en prolongeant chacune de ces formes linéaires à E tout entier grâce au théorème de Hahn-Banach, on trouve bien que V s'écrit comme l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 pour $\sigma(E, E^*)$. Inversement, toute restriction à F d'une forme linéaire continue sur E appartient à F^*, donc l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 dans E est toujours un voisinage faible de 0 dans F.

En tant que compact faible d'un espace de Banach séparable, $A \cap F$ est métrisable d'après les questions précédentes, donc séquentiellement faiblement compact (toujours pour $\sigma(F, F^*)$). Ainsi $\{a_n\}$ admet une sous-suite faiblement convergente au sens de $\sigma(F, F^*)$; mais comme la restriction à F d'un forme linéaire $\ell \in E^*$ est une forme linéaire continue sur F, cette sous-suite est bien faiblement convergente au sens $\sigma(E, E^*)$.

4. On considère $(L^\infty)^*$ dont la boule unité est $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$ compacte, grâce au théorème de Banach-Alaoglu. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_n : L^\infty \to \mathbb{R}$, $\{u_k\}_k \mapsto u_n$. Bien sûr, $\|\varphi_n\| = 1$. Si $\varphi_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ pour $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$, alors pour toute suite $u \in L^\infty$, on a $u_{\sigma(n)} = \varphi_{\sigma(n)}(u) \to \varphi(u)$: autrement dit, il existe une extraction σ telle que pour toute suite bornée, la sous-suite extraite associée soit convergente, ce qui est faux.

⋆

Solution 4. *Uniforme intégrabilité*

1. Si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Notons $C = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^1}$. Pour $f \in \mathcal{F}$ donné, et pour tout $M > 0$, on note aussi

$$A_M(f) = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq M\}.$$

L'inégalité de Markov nous dit que $M\lambda(A_M(f)) \leq \int_\Omega |f| \leq C$, pour tout $M > 0$, donc pour $M \geq \frac{C}{\delta}$, on a $\lambda(A_M(f)) \leq \delta$ (et c'est vrai pour tout $f \in \mathcal{F}$), ce qui implique que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{A_M} |f| \leq \epsilon.$$

Réciproquement, pour tout $M > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,

$$\int_A |f| \leq M\lambda(A) + \int_{\{|f|\geq M\}\cap A} |f|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \leq \varepsilon/2$. Posons $\delta = \varepsilon/(2M)$. Alors, si $\lambda(A) \leq \delta$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f| \leq M\lambda(A) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}\cap A} |f| \leq \varepsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\varepsilon > 0$ et M_0 telle que $t/g(t) \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq M_0$. Alors, pour tout $M \geq M_0$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \leq \varepsilon \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On peut donc conclure grâce à la question précédente.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit M_n tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On peut supposer que la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{x\geq M_n\}} x.$$

Alors $g(x)/x = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N} \mid \ M_n \leq x\} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Enfin, pour tout $f \in \mathcal{F}$, par convergence monotone,

$$\int_\Omega g(|f(x)|)dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f|\geq M_n\}} |f(x)|dx \leq 2,$$

donc $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$.

$\star$

Solution 5. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. Soit u une fonction continue, positive, à support compact dans $]-1,1[$, et d'intégrale 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons $u_n(x) := nu(nx)$. Alors $\int_{-1}^1 |u_n(x)|dx = \|u\|_{L^1}$, et pour tout f continue (et donc induisant sur L^1 une forme linéaire continue), $\langle f, u_n\rangle = \int_{-1}^1 fu_n \to f(0)$ quand $n \to +\infty$. Or il n'existe pas de fonction $\psi \in L^1(]-1,1[)$ telle que $f(0) = \langle f, \psi\rangle$

pour toute fonction f continue (car sinon, un tel ψ serait d'intégrale 1, mais nulle sur tout intervalle ouvert ne contenant pas 0). Donc $\{u_n\}$ n'admet pas de valeur d'adhérence faible.

2. Si, au lieu de considérer f_n, on considère $f_n^+ := f_n \mathbb{1}_{\{f_n \geq 0\}}$ et $f_n^- := -f_n \mathbb{1}_{\{f_n < 0\}}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on obtient toujours bien deux suites bornées de $L^1(\Omega)$, et uniformément intégrables. De plus, si la conclusion est vraie pour les suites de fonctions positives, on peut trouver une sous-suite commune telle que $f_{n_k}^+ \rightharpoonup g^+$ et $f_{n_k}^- \rightharpoonup g^-$, et alors $f_{n_k} \rightharpoonup g^+ - g^-$.

3. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = \sup_n \int_{\{f_n \geq k\}} |f_n| \to 0$ quand $k \to +\infty$, par définition de l'uniforme intégrabilité.

4. Pour k fixé, la suite $\{f_n^k\}_n$ est bornée par k. On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule de rayon k de L^∞ : comme $L^1(\Omega)$ est séparable, d'après l'exercice 1, on peut extraire une sous-suite $\{f^k_{\varphi_k(n)}\}$ qui converge pour la topologhie faible-étoile $\sigma^*(L^\infty, L^1)$ vers une limite $f^k \in L^\infty$. Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, donc $f^k_{\varphi_k(n)}$ converge en fait vers f^k pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$, et bien sûr $f^k \in L^1$.
Pour obtenir ψ, on procède à une extraction diagonale, comme à l'exercice 1.

5. Observons à présent que f^k est une suite croissante : pour tout $g \geq 0$ continue à support compact, on a $\int_\Omega (f^{k+1}_{\psi(n)} - f^k_{\psi(n)})g \geq 0$ donc en passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient le résultat souhaité. Posons $f := \sup_k f^k$. De plus, d'après un résultat classique sur la convergence faible, $\|f^k\|_{L^1} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^k_{\psi(n)}\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_{\psi(n)}\|_{L^1} < +\infty$. Le théorème de Beppo-Levi dit donc que $f \in L^1$ et que f^k converge dans L^1 vers f.

6. Soit $g \in L^\infty$, et $\varepsilon > 0$ fixé. On décompose

$$\left| \int_\Omega (f_{\psi(n)} - f)g \right| \leq \left| \int_\Omega (f_{\psi(n)} - f^k_{\psi(n)})g \right| + \left| \int_\Omega (f^k_{\psi(n)} - f^k)g \right| + \left| \int_\Omega (f^k - f)g \right|.$$

Choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|g\|_{L^\infty}(\|f^k - f\|_{L^1} + \sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1}) \leq \varepsilon/2$. Puis on choisit alors n tel que $|\int (f^k_{\psi(n)} - f^k)g| \leq \varepsilon/2$.

7. L'ensemble $\mathfrak{X}$ est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de $\mathfrak{X}$ converge en norme L^1 vers u, alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u. On voit facilement que u est, à un ensemble négligeable près, à valeurs dans $\{0, 1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, grâce au théorème de convergence dominée (rappelons que $\{f_n\}$ est une partie bornée de $L^1(\Omega)$).

8. On utilise alors le théorème de Baire sur $\mathfrak{X}$ (qui est complet comme fermé de L^1), puisque par hypothèse, $f_n \rightharpoonup f$, et donc $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Un X_n au moins est donc d'intérieur non vide dans $\mathfrak{X}$: cela signifie qu'il existe $B \subset \Omega$ et $\delta > 0$ tel que

$$\lambda(A) \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n, \left| \int_F (f_k - f) \right| \leq \varepsilon \text{ pour } F = B \cup A \text{ et } F = B \setminus A.$$

Or on a, pour toute fonction $g \in L^1$, $\int_{B\cup A} g - \int_{B\setminus A} g = \int_A g$. On en déduit que

$$\lambda(A) \leq \delta \Rightarrow \forall k \geq n, \ |\int_A (f_k - f)| \leq 2\varepsilon.$$

Introduisons maintenant A_k^+ et A_k^-, définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$). Tous deux sont de mesure inférieure à $\lambda(A)$, et on en déduit que

$$\int_A |f_k - f| = \left| \int_{A_k^+} (f_k - f) \right| + \left| \int_{A_k^-} (f - f_k) \right| \leq 4\varepsilon.$$

Donc la famille $\{f_k - f\}_{k\geq n}$ est uniformément intégrable. Donc $\{f_n - f\}_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi (cela ne change pas par un ajout fini de points). Enfin, $\{f_n\}$ l'est aussi : sinon, il existerait

$\varepsilon_0 > 0$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, une fonction g_N appartenant à la suite $\{f_n\}$ et un ensemble A_N tels que $\lambda(A_N) \leq 2^{-N}$, et $\int_{A_N} |g_N| \geq \varepsilon_0$. Or

$$\int_{A_N} |g_N| \leq \int_{A_N} |g_N - f| + \int_{\Omega} |f| \mathbb{1}_{A_N}.$$

Le premier terme est plus petit que $\varepsilon_0/2$ dès que N est assez grand. Quant au second, il tend aussi vers 0 grâce au théorème de convergence dominée : en effet, par le lemme de Borel-Cantelli, x n'appartient presque sûrement qu'à un nombre fini d'ensembles A_N, donc $|f|\mathbb{1}_{A_N} \to 0$ p.p., d'où la contradiction.

$\star$