Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faible et faible-$*$ (2)

Séance du 5 mars 2018

Solution 1. *Échauffement*

Soit $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E^* bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\ell_n\|_{E^*} \le C$). Soit également $\{x_p\}$ une suite dense de E. Alors la suite $\{\ell_n(x_1)\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, et on peut donc trouver une extraction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\ell_{\varphi_1(n)}(x_1) \to r_1 \in \mathbb{R}$. On considère ensuite $\{\ell_{\varphi_1(n)}(x_2)\}$, qui est également bornée, et l'on trouve φ_2 telle que $\ell_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(x_2)$ ait une limite r_2.

Semblablement, on construit par récurrence une suite d'extractions $\{\varphi_j\}$ telles que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j) \xrightarrow{n\to+\infty} r_j \in \mathbb{R}.$$

On définit alors l'extraction *diagonale* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto (\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n)(n)$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, $\ell_{\psi(n)}(x_j) \to r_j$, car c'est une suite extraite de $\{\ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j)\}$ dès que $n \ge j$.

Pour $x \in E$ quelconque, on définit $f(x)$ par

— $f(x) = r_j$, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_j$.

— dans le cas contraire, on trouve $\{p_k\}$ tel que $x_{p_k} \to x$. Alors $\{r_{p_k}\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{N}$, donc elle converge vers un certain nombre, noté $f(x)$, et qui ne dépend pas de l'extraction $\{p_k\}$ choisie. Une simple inégalité triangulaire montre que $\ell_{\psi(n)}(x) \to f(x)$.

L'application f ainsi obtenue est bien sûr linéaire. Elle est aussi continue car

$$|f(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\ell_{\psi(n)}(x)| \le \limsup_{n\to+\infty} \|\ell_{\psi(n)}\| \cdot \|x\| \le C\|x\|.$$

Enfin, la convergence faible-$*$ de $\ell_{\psi(n)}$ vers f est vérifiée, comme nous l'avons observé plus haut.

⋆

Solution 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Rappelons que, d'après la formule de Parseval, $e_n \rightharpoonup 0$ (et ce quelle que soit la base hilbertienne de H considérée). Supposons qu'il existe deux suites d'entiers $\{m_k\}$ et $\{n_k\}$ telles que $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightharpoonup 0$.

- Premier cas : si m_k est bornée, quitte à extraire de nouveau, on peut supposer m_k constant, valant m. Alors n_k est nécessairement non bornée (sans quoi la suite ci-dessus ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs non nulles), et donc $me_{n_k} \rightharpoonup 0$. Ainsi $e_m + me_{n_k} \rightharpoonup e_m \neq 0$, c'est contradictoire.
- Second cas : si m_k n'est pas bornée, alors $\|e_{m_k} + m_k e_{n_k}\| \ge m_k - 1$, donc la suite n'est pas bornée en norme. Elle ne saurait donc converger faiblement, car on sait (par Banach-Steinhaus) que si $x_n \rightharpoonup x$ dans un espace vectoriel normé, alors $\{x_n\}$ est fortement bornée.

Cela prouve que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible. Par contre, e_m y appartient pour tout $m \in \mathbb{N}$ (comme limite faible de $e_m + me_n$ quand $n \to +\infty$), et comme $e_m \rightharpoonup 0$, 0 est dans la « double » adhérence. Cela prouve en particulier que l'adhérence séquentielle faible d'un ensemble n'est pas, en général, faiblement fermée.

$\star$

Solution 3. *Convexes fermés fort et non fermés faible-$*$*

1. Comme pour tout $u, v \in \ell^\infty$, et $\lambda > 0$, on a $\liminf \lambda u = \lambda \liminf u$, et $\liminf(u+v) \geq \liminf u + \liminf v$, on voit que C est convexe. D'autre part, si $u^n \to u$ fortement dans ℓ^∞, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\liminf u \geq \liminf(u - u^n) + \liminf u^n \geq -\|u - u^n\|_\infty,$$

et en faisant tendre $n \to \infty$, on trouve $\liminf u \geq 0$. Donc C est un fermé fort.

Par contre, considérons la suite $u^n \in C$ définie par $u^n_k = -\mathbb{1}_{k \leq n}$. On voit que $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} -\mathbb{1}$, mais $-\mathbb{1} \notin C$. Si C était fermé faible-$*$, ${}^cC$ contiendrait tous les u^n pour n assez grand, ce qui n'est pas le cas.

2. Par définition de la non-réflexivité, il existe une forme linéaire $\psi \in E^{**}$ fortement continue qui ne soit pas de la forme φ_x. Le noyau d'une telle forme est fermé fort dans E^*. S'il était fermé faible-$*$, ce serait le noyau d'une forme linéaire continue pour la topologie $\sigma(E^*, E)$, donc d'une évaluation φ_x, d'après l'exercice 5 du TD n° 3. Par le lemme des noyaux, $\psi = \lambda\varphi_x = \varphi_{\lambda x}$: c'est absurde.

$\star$

Solution 4. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

1. Soit $\{x_n\}$ une famille dénombrable dense de E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fabrique (grâce au théorème de Hahn-Banach) une forme linéaire $\ell_n \in E^*$ de norme 1, et telle que $\ell_n(x_n) = \|x_n\|$. Montrons qu'alors $\{\ell_n\}$ sépare les points. En effet, si $x \in E$ est tel que $\ell_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, trouvons une suite d'entiers tels que $x_{n_k} \to x$ quand $k \to +\infty$. Alors

$$\|x_{n_k}\| = |\ell_{n_k}(x_{n_k})| = |\ell_{n_k}(x_{n_k} - x)| \leq \|\ell_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k} - x\| = \|x_{n_k} - x\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0,$$

donc $x_{n_k} \to 0$, et ainsi $x = 0$.

2. Soient A un compact faible et $\{\ell_n\}$ cette famille séparante ; on peut supposer que $\|\ell_n\| = 1$. On pose

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |\ell_n(x - y)|.$$

L'application d vérifie toutes les propriétés d'une distance. Ensuite, rappelons que, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, A, en tant que compact donc borné faible, est borné pour la norme : il existe $C > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\|a\| \leq C$. La topologie induite sur A par d est donc moins fine que la topologie faible : en effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} C2^{-j} \leq \varepsilon/2$; ainsi $\{x \in A \mid |\ell_j(x)| \leq (N+1)^{-1}\varepsilon/2, \forall j \leq N\} \subset B_d(0, \varepsilon)$. Cela signifie donc que l'application id : $(A, \sigma(E, E^*)) \to (A, d)$ est bijective, continue, partant d'un compact. C'est donc un homéomorphisme, *i.e.* les deux topologies coïncident.

3. L'adhérence forte ou faible est la même dans le cas d'un convexe : F est donc un Banach (fermé dans un Banach). Alors $A \cap F$ est compact pour la topologie faible sur F : en effet, la topologie faible sur F est bien la topologie induite par la topologie forte sur E,

car si V est un voisinage faible de 0 pour $\sigma(F,F^*)$, alors il existe $\ell_1,\dots,\ell_N \in F^*$, et $\varepsilon > 0$ tels que V contienne l'ensemble $\bigcap_{n=1}^N \{x \in F \mid |\ell_n(x)| < \varepsilon\}$, et en prolongeant chacune de ces formes linéaires à E tout entier grâce au théorème de Hahn-Banach, on trouve bien que V s'écrit comme l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 pour $\sigma(E,E^*)$. Inversement, toute restriction à F d'une forme linéaire continue sur E appartient à F^*, donc l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 dans E est toujours un voisinage faible de 0 dans F. Ainsi $A \cap F$ est un compact pour $\sigma(E,E^*)$ (car fermé dans un compact) inclus dans F. C'est donc un compact pour $\sigma(F,F^*)$.

En tant que compact faible d'un espace de Banach séparable, $A \cap F$ est métrisable d'après les questions précédentes, donc séquentiellement faiblement compact (toujours pour $\sigma(F,F^*)$). Ainsi $\{a_n\}$ admet une sous-suite faiblement convergente au sens de $\sigma(F,F^*)$; mais comme la restriction à F d'un forme linéaire $\ell \in E^*$ est une forme linéaire continue sur F, cette sous-suite est bien faiblement convergente au sens $\sigma(E,E^*)$.

4. On considère $(L^\infty)^*$ dont la boule unité est $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$ compacte, grâce au théorème de Banach-Alaoglu. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\varphi_n : L^\infty \to \mathbb{R}$, $\{u_k\}_k \mapsto u_n$. Bien sûr, $\|\varphi_n\| = 1$. Si $\varphi_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ pour $\sigma((L^\infty)^*, L^\infty)$, alors pour toute suite $u \in L^\infty$, on a $u_{\sigma(n)} = \varphi_{\sigma(n)}(u) \to \varphi(u)$: autrement dit, il existe une extraction σ telle que pour toute suite bornée, la sous-suite extraite associée soit convergente, ce qui est faux.

⋆

Solution 5. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via Krein-Milman*

1. Soit $A = \overline{\mathcal{A}}$. C'est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$. Soit E une partie A-antisymétrique. Comme $\mathcal{A}$ sépare les points, E est un singleton : si E contenait deux points $x \neq y$, on pourrait trouver $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$, et alors $f + \bar{f}$, $-i(f - \bar{f}) \in A$, sont réelles, et l'une au moins sépare x et y. Donc toute partie A-antisymétrique maximale est un singleton. Si maintenant $f \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, notons $E = \{x\}$ une partie A-antisymétrique maximale, et choisissons $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq 0$. Alors $h := \frac{f(x)}{g(x)} g \in A$, et sa restriction à E égale $f|_E$. Donc $f|_E \in A_E$. D'après le théorème de Bishop, $f \in A$, et donc $A = \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$.

2. K est convexe, car c'est l'intersection de deux convexes : la boule unité de dual de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, et $A^\perp$. K est également faible-$*$ compact, car d'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de $\mathcal{M}(X,\mathbb{C})$ est compacte pour cette topologie, et $A^\perp$ est fermé faible-$*$, en tant qu'intersection de fermés faible-$*$. Si $K = \{0\}$, alors $A^\perp = \{0\}$. Donc A est dense (d'après le théorème de Hahn-Banach) ; or A est fermée, donc $A = \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, et donc $g \in A$.

3. Observons déjà que $\|\mu\| = 1$. Comme A est une algèbre, $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\| \in A^\perp$ et sont de norme 1. Par ailleurs, $\mu = \sigma + \tau = \|\sigma\| \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + \|\tau\| \frac{\tau}{\|\tau\|}$, qui est bien une combinaison convexe car

$$\|\sigma\| + \|\tau\| = \int_{E_\mu} \tfrac{1}{2}(1+f) d|\mu| + \tfrac{1}{2}(1-f) d|\mu| = \int_{E_\mu} d|\mu| = 1.$$

Ainsi, $\mu = \sigma/\|\sigma\|$, et donc

$$\left(1 - \frac{1+f}{\int_{E_\mu}(1+f) d|\mu|}\right) d\mu = 0,$$

ce qui veut dire que f est constante μ-presque partout sur E_μ (notons c sa valeur). Prouvons que cela implique que f est constante partout sur E_μ. En effet, s'il existe $x \in E_\mu$ tel que $f(x) \neq c$, grâce à la continuité de f, il existe $n \geq 1$ tel que $f \neq c$ sur $B_X(x, \frac{1}{n})$. Donc

$\mu(B_X(x,\frac{1}{n})\cap E_\mu) = 0 = \mu(B_X(x,\frac{1}{n}))$. Dès lors, $E_\mu \setminus B_X(x,\frac{1}{n})$ est un compact qui supporte μ, ce qui contredit la minimalité de E_μ.

Étant donné $h \in A$, réelle sur E_μ, notons $f = \frac{1}{2}\frac{h}{\|h\|_{L^\infty}}$. Alors $f \in A$ et f vérifie les conditions ci-dessus, donc $f|_{E_\mu}$ est constante, c'est-à-dire que $h|_{E_\mu}$ est constante, et donc E_μ est A-antisymétrique.

4. Pour tout $\mu \in K$ extrémal, on a vu que $E_\mu = \operatorname{supp}\mu$ est A-antisymétrique. Soit g comme dans le théorème. Si $E_\mu \subseteq E$, une partie A-antisymétrique maximale, $g|_E \in A_E$, donc il existe $\tilde{g} \in A$ tel que $g|_E = \tilde{g}|_E$, et par définition de E_μ,

$$\langle g, \mu\rangle = \int_X g d\mu = \int_{E_\mu} g d\mu = \int_{E_\mu} \tilde{g} d\mu = \int_X \tilde{g} d\mu = 0,$$

puisque $\tilde{g} \in A$ et $\mu \in A^\perp$. Mais $\{\nu \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C}) \mid \langle g,\nu\rangle = 0\}$ est convexe et fermé faible-$*$, donc il contient l'adhérence de l'enveloppe convexe des points extrémaux de K, c'est-à-dire K (grâce au théorème de Krein-Milman). On en conclut que $\{\nu \in \mathcal{M}(X,\mathbb{C}) \mid \langle g,\nu\rangle = 0\} = A^\perp$. Par Hahn-Banach, $g \in \bar{A} = A$ (sinon, on pourrait séparer g de $\bar{A}$ par une forme linéaire, qui serait nulle sur $\bar{A}$ et non nulle sur g : c'est précisément ce qui ne peut pas arriver).

5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons $\varphi_k : f \mapsto \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. Chaque φ_k est une forme linéaire continue pour la norme uniforme, et $\mathcal{A} = \bigcap_{k<0}\ker(\varphi_k)$, donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$. De plus, $\mathcal{A}$ est stable par multiplication, car on sait que, pour f, g continues, et $k < 0$,

$$\varphi_k(fg) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_j(f)\varphi_{k-j}(g) = 0.$$

Bien entendu, $\mathcal{A}$ contient la fonction constante. Enfin, $\mathcal{A}$ sépare les points, puisque $e^{ix} \neq e^{iy}$ si $x \neq y$ modulo 2π. Mais $\mathcal{A}$ n'est pas stable par conjugaison complexe. D'ailleurs, $\mathcal{A}$ n'est pas dense : $d_{L^2}(e^{-ix},\mathcal{A}) = 1$, donc $\forall f \in \mathcal{A}, \|f - e^{-ix}\|_\infty \leq 1$.

⋆