Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 4

Topologies faible et faible $*$ (1)

Séance du 25 février 2019

Solution 1. *Échauffement : trois exemples fondamentaux*

1. On commence par remarquer que $\|u_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la convergence vers 0 ne peut pas être forte. On raisonne ensuite par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit de voir que pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$, $\langle u_n, \psi\rangle = \int u_n \bar{\psi} \to 0$, ce qui est immédiat, car les supports des deux fonctions sont disjoints si n assez grand. Ensuite, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ quelconque, on trouve $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\|f-\psi\|_{L^2} \leq \varepsilon$. On a $|\langle u_n, f\rangle| \leq |\langle u_n, f-\psi\rangle| + |\langle u_n, \psi\rangle| \leq \|\phi\|_{L^2}\varepsilon + |\langle u_n, \psi\rangle|$ par Cauchy-Schwarz, donc $\limsup_{n\to+\infty} |\langle u_n, f\rangle| \leq \|\phi\|_{L^2}\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat.

2. Comme précédemment, $\|v_n\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2} \neq 0$ pour tout n, donc la convergence vers 0 ne peut pas être forte. Ensuite, il suffit de constater que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ est dense dans L^2, et que le support de v_n se concentre autour de 0.

3. Enfin, pour w_n, on commence par le cas où $w(x) = e^{ikx}$, $k \neq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{C}^1_{per}([0,2\pi])$. Il suffit alors de faire une intégration par partie (lemme de Riemann-Lebesgue) :

$$\int_0^{2\pi} e^{iknx}\psi(x)dx = -\frac{1}{ikn}\int_0^{2\pi} e^{iknx}\psi'(x)dx = \mathcal{O}(1/n),$$

et de conclure par densité. Dans le cas général, on écrit $w(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx}$, avec convergence de la série dans L^2. D'après le calcul précédent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $w_n^{(N)} := \sum_{|k|\leq N} a_k e^{iknx} \rightharpoonup a_0$ quand $n \to +\infty$. À présent, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, comme à n fixé, $w_n^{(N)} \to w_n$ dans $L^2([0,2\pi])$ quand $N \to +\infty$, et ceci uniformément par rapport à n, on a

$$|\langle w_n - a_0, f\rangle| \leq |\langle w_n^{(N)} - a_0, f\rangle| + |\langle w_n - w_n^{(N)}, f\rangle| \leq |\langle w_n^{(N)} - a_0, f\rangle| + \left(\sum_{|k|>N} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2},$$

et donc $\limsup_{n\to\infty} |\langle w_n - a_0, f\rangle| \leq R_N\|f\|_{L^2}$, avec $R_N \to 0$ quand $N \to +\infty$, d'où le résultat. Ainsi, $w_n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w$ quand $n \to +\infty$ dans $L^2([0,2\pi])$.

D'autre part, la suite $(w_n)_n$ ne converge pas fortement car d'après la formule de Parseval, $\|w_n - a_0\|_{L^2} = \|w - a_0\|_{L^2}$, qui n'est jamais nul, puisque w n'est pas constante.

$\star$

Solution 2. *La topologie faible n'est pas métrisable*

1. Si la topologie faible est métrisable, alors les boules ouvertes $B(0,1/n)$ (pour la distance qui induit cette topologie) sont des ouverts faibles : elles contiennent donc chacune une droite $\mathbb{R}y_n$. On pose $x_n = ny_n/\|y_n\|$. Alors $\|x_n\| = n$ et $x_n \in B(0,1/n)$ donc $x_n \rightharpoonup 0$.

2. C'est une contradiction avec le théorème de Banach-Steinhaus, qui assure que toute suite faiblement convergente est bornée. Rappelons l'argument. Si E est normé, $E^* = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ est toujours un Banach car $\mathbb{R}$ est complet. Considérons la suite d'applications $\varphi_n : \ell \in E^* \mapsto \ell(x_n) \in \mathbb{R}$. Alors φ_n est une application linéaire bornée, dont la norme (par Hahn-Banach) vaut $\|x_n\|$. Or, pour tout $\ell \in E^*$

fixé, $\sup_n |\varphi_n(\ell)| < +\infty$, car $\ell(x_n) \to 0$, par définition de la convergence faible. Donc le théorème de Banach-Steinhaus affirme que $\sup_n \|\varphi_n\|_{E^*} < +\infty$, ce qui signifie exactement que la suite $(x_n)_n$ est bornée dans E.

3. (Lemme des noyaux.) Considérons $\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x) = (\psi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un convexe fermé (un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$), et par la condition sur les noyaux, $a = (1, 0, \dots, 0) \notin \Phi(E)$.

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{n+1}$, notée ℓ, et donnée par $\ell(x) = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j$, et qui sépare strictement $\Phi(E)$ de a. Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \Phi(E)$, $\ell(x) < c$ et $\ell(a) > c$. Comme $0 \in \Phi(E)$, $c > 0$ et par homogénité, on a $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in \Phi(E)$. Cela signifie que

$$\forall y \in E, \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0.$$

Mais $\ell(a) = \lambda_0 > c > 0$, et donc on peut diviser par λ_0, ce qui prouve que $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

4. Un voisinage élémentaire de 0 pour la topologie faible est

$$U = \{x \in E;\ |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\},$$

où $\ell_1, \dots, \ell_k \in E^*$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ sont donnés. Si E est métrisable, il existe une base dénombrable de voisinages (élémentaires) de 0 : chacun de ces voisinages ne fait intervenir qu'un nombre fini de formes linéaires. Notons F l'ensemble dénombrable des formes linéaires mises en jeu.

Soit $\ell \in E^*$. Alors $\{x \in E;\ |\ell(x)| < 1\}$ est un voisinage faible de 0, donc il existe $\ell_1, \dots, \ell_k \in F$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ tels que :

$$\{x \in E;\ |\ell_1(x)| < \varepsilon_1, \dots, |\ell_k(x)| < \varepsilon_k\} \subseteq \{x \in E \mid \ |\ell(x)| < 1\}.$$

En particulier, si $x \in \bigcap_{i=1}^k \ker \ell_i$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^k \ker \ell_i$ donc $|\ell(\lambda x)| < 1$. Ainsi, $x \in \ker \ell$. Par la question précédente on en déduit que $\ell \in \mathrm{Vect}(\ell_1, \dots, \ell_k)$.

Le raisonnement précédent montre que E^* est à base au plus dénombrable (au sens algébrique). Mais E^* est complet et de dimension infinie : par le théorème de Baire, c'est absurde (E^* ne saurait s'écrire comme une réunion dénombrable de sous-espaces de dimension finie, qui sont des fermés d'intérieur vide).

$\star$

Solution 3. *Autour des théorèmes de Krein-Milman et de Banach-Alaoglu*

1.

a) Soit $f \in L^1([0,1])$ tel que $\|f\|_{L^1} = 1$. Soit $\theta \in]0,1[$ tel que $\int_0^\theta |f| = \frac{1}{2}$. On pose $g(t) = f(t)$ si $t \in [0, \theta]$, 0 sinon et $h = f - g$. Alors $\|2g\|_{L^1} = 1$ et $\|2h\|_{L^1} = 1$. On a $f = \frac{1}{2}(2g + 2h)$, $f \neq 2g$, et $f \neq 2h$ (car $\theta \notin \{0, 1\}$).

b) Supposons $L^1([0,1])$ isométrique à l'espace dual X^* d'un espace vectoriel normé X. Alors d'après le théorème de Krein-Milman, la boule unité de X^*, notée B_{X^*}, en tant que convexe compact (pour la topologie faible $*$, qui munit bien X^* d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé), est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En particulier, B_{X^*} admet des points extrémaux. Or la propriété d'être un point extrémal est préservée par isométrie (en fait, même par isomorphisme). Donc B_{L^1} admet des points extrémaux, ce qui contredit le résultat de la question 1.

2. On raisonne de la même façon. Supposons $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ isométrique à l'espace dual X^* d'un espace vectoriel normé X. Alors d'après le théorème de Krein-Milman, la boule unité B_{X^*} de X^*, en tant que convexe compact (pour la topologie faible $*$), est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En particulier, B_{X^*} admet des points extrémaux. Or la propriété d'être un point extrémal est préservée par isométrie. Donc $B_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)}$ admet des points extrémaux. On va montrer que ce n'est pas le cas. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$. Comme f tend vers 0 à l'infini, il existe M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x\| \geq M$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$. On ajoute alors à f une petite fonction bosse g à support dans $\{x \in \mathbb{R}^d;\ M \leq \|x\| \leq M+2$ et de norme infinie inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Par exemple, on peut poser $g(x) := \frac{1}{2}\max(1 - |M+1-\|x\||, 0)$. Comme $f+g$ et $f-g$ appartiennent à $B_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)}$, f n'est pas extrémale.

3.

a) On montre que les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ sont les fonctions constantes égales à 1 et -1.

   Ces fonctions sont bien extrémales, en effet, si $f = \pm 1$, alors pour tout $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, si g n'est pas identiquement nulle, il existe $x \in [0,1]$ tel que $g(x) \neq 0$. Mais alors pour un certain signe ε, $|1 + \varepsilon g(x)| > 1$, donc $\frac{1}{2}(1+\varepsilon g)$ et $\frac{1}{2}(-1-\varepsilon g)$ ne sont pas dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

   Réciproquement, soit f un point extrémal de la boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. S'il existe $x \in [0,1]$ tel que $|f(x)| < 1$, alors par continuité il existe un intervalle d'intérieur non vide $[a,b] \subset [0,1]$ contenant x et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(y)| \leq 1 - \varepsilon$ pour tout $y \in [a,b]$. On considère une fonction bosse g à support dans $[a,b]$ de norme infinie inférieure ou égale à ε, et alors $\frac{1}{2}(f \pm g)$ est toujours dans la boule unité de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, donc f n'est pas extrémale. Par conséquent, $|f| = 1$ donc f est constante égale à 1 ou -1.

b) Supposons $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ isométrique à l'espace dual X^* d'un espace vectoriel normé X. Alors d'après le théorème de Krein-Milman, la boule unité B_{X^*} de X^*, en tant que convexe compact (pour la topologie faible $*$), est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Or la propriété d'être un point extrémal est préservée par isométrie. Donc $B_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})}$ est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Mais $\mathrm{co}(1,-1)$ est l'ensemble des fonctions constantes dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 1, et on voit qu'il est fermé pour la topologie faible $*$, donc en particulier $B_{\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})}$ n'est pas l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.

⋆

Solution 4. *Autour du lemme de Goldstine*

1. C'est une conséquence du théorème de Hahn-Banach. En effet, pour $x \in X$,

$$\|J(x)\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\|_{E^*} \leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|_E.$$

Comme J est bien sûr linéaire, c'est une isométrie de X dans $J(X)$.

Soit une suite $(x_n)_n$ de X telle que $J(x_n) \to y \in X^{**}$. La suite $(J(x_n))_n$ est de Cauchy, donc

$$\|x_n - x_m\|_X = \|J(x_n - x_m)\|_{X^{**}} = \|J(x_n) - J(x_m)\|_{X^{**}} \to 0 \quad \text{si } n, m \to +\infty.$$

Donc $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X, donc converge vers un $x \in X$, puisque X est complet. Comme J est continue, $J(x_n) \to J(x)$, ce qui prouve que l'image de J est fermée. (Remarquons que la réciproque est vraie : si $J(X)$ est fermé, alors X est complet.)

2. Soit ψ une forme linéaire sur E^* qui est continue pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. L'ensemble $\psi^{-1}(\,]-1,1[\,)$ est donc un voisinage ouvert de 0 dans E^* pour cette topologie, d'où l'existence de vecteurs $x_1, \ldots, x_N \in E$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{\ell \in E^* \,|\, \forall j = [\![1,N]\!];\ |\ell(x_j)| < \varepsilon\} \subseteq \psi^{-1}(\,]-1,1[\,).$$

Cela implique en particulier que

$$\bigcap_{j=1}^{N} \ker(\varphi_{x_j}) \subseteq \psi^{-1}(\,]-1,1[\,),$$

et c'est même un sous-ensemble de $\ker\psi$, car cette intersection est un sous-espace vectoriel de E^* sur lequel ψ est bornée (cf exercice 2 question 4). Par le lemme des noyaux, il existe donc des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tels que

$$\psi = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{x_j},$$

c'est-à-dire que ψ est l'évaluation en x, avec $x := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j$.

3. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\psi \in B_{X^{**}} \setminus \overline{J(B_X)}$ (où l'adhérence est comprise au sens de la topologie faible $*$) ; par Hahn-Banach, on peut alors le séparer strictement de $\overline{J(B_X)}$ par une forme linéaire a sur X^{**} continue pour la topologie $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Or les formes linéaires continues sur X^{**} pour la topologie faible $*$ sont exactement les évalutations : il existe donc $\ell_0 \in X^*$ telle que $a = \tilde{\varphi}_{\ell_0}$ (en notant ainsi l'évaluation des éléments de X^{**} en ℓ_0). Ainsi, pour tout $x \in B_X$, $a(\varphi_x) = \varphi_x(\ell_0) = \ell_0(x)$. La propriété de séparation signifie donc qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in B_X$, $|a(\varphi_x)| = |\ell_0(x)| < c$, tandis que $|a(\psi)| = |\psi(\ell_0)| > c$. La première inégalité prouve que $\|\ell_0\|_{X^*} \leq c$, et donc $|\psi(\ell_0)| \leq \|\psi\|_{X^{**}} \|\ell_0\|_{X^*} \leq c$, d'où une contradiction.

$\star$

Solution 5. *Propriété de Schur pour $\ell^1(\mathbb{N})$*

1. L'application d est bien définie sur $B^* \times B^*$. Elle vérifie toutes les propriétés d'une distance : inégalité triangulaire (simple conséquence de celle sur $\mathbb{R}$), symétrie, et séparation (car si ℓ et ℓ' coïncident sur chaque x_n, alors, elles coïncident par continuité sur B, et par linéarité sur E).

Enfin, montrons que d engendre la topologie faible $*$ sur B^*. Tout d'abord, soit $B(\ell, r)$ une boule pour d, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-n} < \frac{r}{2}$. Alors $\sum_{j=0}^{n} \frac{2^{-j} r}{4} + \sum_{j=n+1}^{+\infty} 2^{-j} \leq \frac{r}{2} + 2^{-n} < r$, donc on a un ouvert faible $*$

$$\bigcap_{j=0}^{n} \left\{ \ell' \in E^* \; ; \; |(\ell - \ell')(x_j)| \leq \frac{r}{4} \right\} \subseteq B(\ell, r).$$

Réciproquement, si V est un voisinage faible $*$ de $\ell \in E^*$, alors V contient un ensemble du type $\bigcap_{j=1}^{N} \{\ell' \in E^* \mid |(\ell - \ell')(y_j)| \leq \varepsilon\}$, pour certains $\varepsilon > 0$ et $y_1, \ldots, y_N \in E$ (on peut même les supposer dans B, quitte à réduire ε). Choisissons alors $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$ tels que pour tous $1 \leq j \leq N$, $\|y_j - x_{k_j}\| \leq \varepsilon/4$. Choisissons $M = \max(k_1, \ldots, k_N)$ et $r < \frac{\varepsilon}{2^{M+1}}$. Alors pour tout $\ell' \in B(\ell, r)$, pour tout j entre 1 et N,

$$|\ell(y_j) - \ell'(y_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\ell(x_{k_j}) - \ell'(x_{k_j})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{k_j} r < \varepsilon,$$

donc $B(\ell, r) \subset V$.

2. On considère $e^j := (\delta_{jk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, qui définit pour chaque $j \in \mathbb{N}$ une forme linéaire continue sur $\ell^1(\mathbb{N})$. Alors $\langle e^j, u^n \rangle = u^n_j \to 0$ quand $n \to \infty$ (par définition de la convergence faible).

3. Cette distance induit bien la même topologie que la topologie faible $*$, car on peut répéter les arguments de la question 1, en se rappelant que $\mathrm{Vect}(e^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$.

Par ailleurs, B^* est compact pour la topologie faible $*$ (par le théorème de Banach-Alaoglu), donc compact (et complet) pour $\tilde{d}$.

4. Tout d'abord, F_n est fermé, car c'est l'intersection des fermés $G^m := \{v \in B^* \mid |\langle v, u^m \rangle| \leq \varepsilon\}$ pour $m \geq n$. Ensuite, grâce à la convergence faible, $\langle v, u^k \rangle \to 0$ pour tout $v \in B^*$ donc $\bigcup_n F_n = B^*$.

D'après le lemme de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que F_{n_0} soit d'intérieur non vide. Comme F_{n_0} est équilibré et convexe, F_{n_0} est un voisinage de 0. Par définition de la distance, il existe donc $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $v \in B^*$,

$$(\forall k \leq N,\ |v_k| \leq \delta) \Rightarrow v \in F_{n_0}.$$

On choisit donc v^m telle que

$$\begin{cases} v_k^m = 0 & \text{si } k \leq N, \\ v_k^m = \operatorname{sgn}(u_k^m) & \text{si } k > N. \end{cases}$$

Alors $v^m \in F_{n_0}$ pour tout m, donc pour $m \geq n_0$, on a en particulier :

$$|\langle v^m, u^m \rangle| < \varepsilon, \quad \text{i.e.} \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k^m| < \varepsilon.$$

Enfin, on choisit $n_1 \geq n_0$ assez grand, tel que pour tout $n \geq n_1$ et pour tout $k \leq N$, la conséquence suivante de la question de la question 2 s'applique

$$|u_k^n| \leq \frac{\varepsilon}{N}.$$

On en déduit que si $n \geq n_1$, $\|u^n\|_{\ell^1} < 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure que u^n converge fortement vers 0.

5. L'application id : $(\ell^1(\mathbb{N}), \sigma(\ell^1(\mathbb{N}), \ell^1(\mathbb{N})^*)) \to (\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^1})$ est séquentiellement continue (nous venons de le prouver), mais elle n'est pas continue, car sinon, la boule unité ouverte de $\ell^1(\mathbb{N})$ (pour la norme $\|\cdot\|_{\ell^1}$) serait un voisinage faible de 0. C'est impossible, car on a vu plus haut que tout voisinage faible de 0 contient une droite.

⋆