Indications pour le Td n° 4 d'EDP

Opérateurs pseudo-différentiels

Séance du 24 octobre 2014

Solution 1. *Inégalité de Garding raffinée*

On est dans les conditions pour appliquer l'inégalité de Garding. On a donc

$$Re(Op(a)u,u) \geq A\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}} - B\|u\|^2_{H^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^{\frac{m-1}{2}}} &= \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&\leq \varepsilon \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{1}{\varepsilon} \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m-2}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&\leq 2\varepsilon \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{1}{e^2} \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m-4}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi \\
&\leq K\varepsilon \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi + \frac{1}{e^K} \int (1+|\xi|^2)^{\frac{m-2K}{2}} |\hat{u}|^2 d\xi
\end{aligned}$$

On a donc

$$(A - BK\varepsilon)\|u\|^2_{H^{\frac{m}{2}}} - \frac{B}{\varepsilon^K}\|u\|^2_{H^{\frac{m-2K}{2}}} \leq Re(Op(a)u,u).$$

Pour ε assez petit, cela donne l'inégalité voulue.

⋆

Solution 2. *Somme assymptotique de symboles*

1. Comme a_j est d'ordre m_j on a

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \widetilde{a_j}| \leq C \sup_{\varepsilon_j|\xi|\geq A} (1+|\xi|)^{m_j-|\beta|} C \sum_{k\leq|\beta|} \varepsilon_j^k \sup_{B\leq\varepsilon_j|\xi|\leq A} (1+|\xi|)^{m_j-|\beta|+k} \leq \varepsilon_j C'(1+|\xi|)^{m_j+1-|\beta|}.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon_j C' \leq \frac{1}{2^j}$.

2. La somme est localement finie donc $a \in C^\infty$.

3. Soit N tel que

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (a - \sum_{j\leq N} \widetilde{a_j})| \leq C(1+|\xi|)^{m_k-|\beta|}.$$

On peut ensuite écrire

$$a - \sum_{j<k} a_j = a - \sum_{j\leq N} \widetilde{a_j} + \sum_{k\leq j\leq N} \widetilde{a_j} + \sum_{j<k} (a_j - \widetilde{a_j}).$$

Le premier terme est dans S^{m_k} d'après le choix de N, le second terme est dans S^{m_k} car pour $j \geq k$ les a_j sont S^{m_k} par hypothèse, et le dernier terme est dans $S^{-\infty}$.

⋆

Solution 3. *Inversion des opérateurs elliptiques*

1. On écrit

$$Op(b) - Op(b') = (Id - Op(b')Op(a))Op(b) - Op(b')(Id - Op(a)Op(b)) \in Op(S^{-\infty}).$$

2. On a $Op(a)Op(b) = Op(ab) + Op(S^{-1}) = Id + Op(S^{-\infty})$, donc

$$|a(x,\xi)b(x,\xi) - 1| \leq C(1+|\xi|)^{-1},$$

donc pour ξ assez grand

$$\frac{1}{2} \leq |a(x,\xi)b(x,\xi)|.$$

Comme $b \in S^{-m}$, on a de plus

$$|b(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-m},$$

ce qui permet de conclure.

3. On a $Op(a)Op(b) = Op(ab) + Op(S^{-1})$, et $Op(ab) - I \in Op(S^{-\infty})$.

4. On pose $B_k = Op(b)R^k$, et on choisit B tel que $B \sim \sum B_k$. On vérifie que B convient.

⋆

Solution 4. *Opérateurs locaux*

1. On a, comme $m < -\frac{n}{2}$

$$|Pu(x_0) - Pu_k(x_0)| \leq \|P(u-u_k)\|_{H^{-m}} \leq \|u-u_k\|_{L^2},$$

donc en passant à la lipite quand $k \longrightarrow \infty$ on obtient $Pu(x_0) = 0$, donc $P = 0$.

2. Si $km < -\frac{n}{2}$, comme P^k est d'ordre km, $P^k = 0$. Or $P^k = Op(p(x,k)^k) + Op(S^{km-1})$, doc soit $P \in Op(S^{-\infty})$, soit $P = 0$. D'après la question précédente, dans les deux cas $P = 0$.

3. La localité implique que $u \mapsto Pu(x_0)$ est supportée en x_0. C'est donc une combinaison linéaire finie de $\delta_{x_0}^{(i)}$.

4. $Adf_1 ... Adf_k P$ est d'ordre $m - k < 0$ et est local donc $Adf_1 ... Adf_k P = 0$.

5. On peut montrer le résultat par récurrence sur k. Si P est d'ordre $m < k+1$, alors $Adf P$ est d'ordre $m - 1 < k$, donc $Adf P = \sum_{|\alpha| \leq k-1} a_f^\alpha(x) D^\alpha$. Or en x_0, on a d'après la question 3 $P(u)(x_0) = \sum_{|\beta| \leq N} b^\beta \delta^\beta$. On a donc pour tout u

$$\sum_{|\beta| \leq N} b^\beta D^\beta(uf) = f \sum_{|\beta| \leq N} b^\beta f D^\beta u + \sum_{|\alpha| \leq k-1} a_f^\alpha(x) D^\alpha u$$

donc $P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha$, et on calcule $a_0 = P(1) \in C^\infty$, $a_1 = P(x) - a_0 x \in C^\infty$.....

⋆