Correction du Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet

Séance du 13 mars 2015

Solution 1. *Inégalité de Poincaré*

1. On écrit
$$u^2(x) = \int_a^x 2uu'dx \leq 2\|u\|_{L^2(]a,b[)}\|u'\|_{L^2(]a,b[)},$$
donc en intégrant sur $[a,b]$ on obtient
$$\|u\|^2_{L^2(]a,b[)} \leq 2|b-a|\|u\|_{L^2(]a,b[)}\|u'\|_{L^2(]a,b[)},$$
donc
$$\|u\|_{L^2(]a,b[)} \leq 2|b-a|\|u'\|_{L^2(]a,b[)},$$

2. Si maintenant $u \in C_c^\infty(]a,b[\times\mathbb{R}^d)$, on a d'après la question précédente, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$
$$\int_a^b u^2(x,y)^2 dx \leq 4|b-a|^2 \int_a^b (\partial_x u(x,y))^2 dx,$$
donc en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on obtient le résultat souhaité.

⋆

Solution 2. *Diagonalisation du Laplacien de Dirichlet*

3. La forme $a(u,v) = \int \nabla u.\nabla v$ est continue sur H_0^1 et corecive d'après l'inégalité de Poincaré. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram qui nous donne l'existence d'un unique $u \in H_0^1$ tel que
$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \int \nabla v.\nabla u = \int fv.$$

4. En appliquant la formule précédente à $v = u$, on a
$$\|\nabla u\|^2_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2},$$
donc d'après l'inégalité de Poincaré, on a
$$\|u\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{L^2}.$$
L'application $-\Delta{-1}$ est donc continue $L^2 \to H_0^1$. Comme l'injection de H_0^1 dans L^2 est compacte, l'application $-\Delta{-1} : L^2 \to L^2$ est compacte. Soit $f, g \in L^2$. En appliquant la définition de solution faible avec $u = -\Delta{-1}g$ et $v = -\Delta{-1}f$ on obtient
$$-\int g\Delta^{-1}f = \int \nabla\Delta{-1}f.\nabla\Delta{-1}g$$

puis en inversant les rôles on obtient

$$-\int g\Delta^{-1}f = -\int f\Delta^{-1}fg.$$

5. $-\Delta^{-1}$ est autoadjoint compacte donc il existe une base orthonormale e_n de L^2 et une suite μ_n décroissante tendant vers 0 telle que

$$-\Delta^{-1}e_n = \mu_n e_n.$$

On pose ensuite $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$.

⋆