Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 5

Convexité — Théorème de Krein-Milman

Séance du 27 février 2017

Solution 1. *Échauffement*

Soit ℓ une forme linéaire sur X^*, continue pour la topologie faible-$*$. Montrons que ℓ est l'évaluation φ_x en un point $x \in X^*$. En effet, $\ell^{-1}(]-1,1[)$ est un ouvert faible-$*$ qui contient 0. Donc il existe des points $x_1, \dots, x_N \in X$, et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\bigcap_{j=1}^{N} \{\ell' \in X^* \mid |\varphi_{x_j}(\ell')| = |\ell'(x_j)| < \varepsilon\} \subset \ell^{-1}(]-1,1[).$$

Donc $\bigcap_{j=1}^N \ker \varphi_{x_j} \subseteq \ell^{-1}(]-1,1[)$, et c'est même un sous-ensemble de $\ker \ell$, puisque ℓ est bornée, donc nulle, sur le sous-espace de gauche. Ainsi, par le lemme des noyaux, $\ell = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_{x_j} = \varphi_x$, où l'on a posé $x := \sum_j \lambda_j x_j$.

⋆

Solution 2. *Convexes fermés fort et non fermés faible-$*$*

1. Comme pour tout $u, v \in \ell^\infty$, et $\lambda > 0$, on a $\liminf \lambda u = \lambda \liminf u$, et $\liminf(u + v) \geq \liminf u + \liminf v$, on voit que C est convexe. D'autre part, il est clair que le complémentaire de C est ouvert pour la topologie uniforme, donc C est un fermé fort. Par contre, considérons la suite $u^n \in C$ définie par $u^n_k = -\mathbb{1}_{k \leq n}$. On voit que $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} -\mathbb{1}$, mais $-\mathbb{1} \notin C$. Si C était fermé faible-$*$, ${}^cC$ contiendrait tous les u^n pour n assez grand, ce qui n'est pas le cas.

2. Par définition de la non-réflexivité, il existe une forme linéaire $\psi \in E^{**}$ fortement continue qui ne soit pas de la forme φ_x. Le noyau d'une telle forme est fermé fort dans E^*. S'il était fermé faible-$*$, ce serait le noyau d'une forme linéaire continue pour la topologie $\sigma(E^*, E)$, donc d'une évaluation φ_x, d'après l'exercice 1. Par le lemme des noyaux, $\psi = \lambda \varphi_x = \varphi_{\lambda x}$: c'est absurde.

⋆

Solution 3. *Sur $L^1([0,1])$*

1. Soit $f \in L^1([0,1])$ tel que $\|f\|_{L^1} = 1$. Soit $\theta \in [0,1]$ tel que $\int_0^\theta |f| = \frac{1}{2}$. On pose $g(t) = f(t)$ si $t \in [0, \theta]$, 0 sinon et $h = f - g$. Alors $\|2g\|_{L^1} = 1$ et $\|2h\|_{L^1} = 1$. On a $f = \frac{1}{2}(2g + 2h)$, $f \neq 2g$, et $f \neq 2h$ (car $\theta \notin \{0,1\}$).

2. Supposons $L^1([0,1])$ isométrique à l'espace dual X^* d'un espace vectoriel normé X. Alors d'après le théorème de Krein-Milman, la boule unité de X, notée B_X, en tant que convexe compact (pour la topologie faible-$*$), est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En particulier, B_X admet des points extrémaux. Or la propriété d'être un point extrémal est préservée par isométrie (en fait, même par isomorphisme). Donc B_{L^1} admet des points extrémaux, ce qui n'est pas le cas.

3. Il est clair que toute suite $\{a_k\} \in \ell^1$ induit une forme linéaire continue sur c_0 via $\varphi_a : \{u_k\} \mapsto \sum_k a_k u_k$. On a $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_{\ell^1}$. À présent, soit $\varphi \in (c_0)^*$. Posons $a_k := \varphi(\delta_k)$, où δ_k est la suite qui vaut 1 en k, et 0 ailleurs. Soit ε_k un signe tel que $\varphi(\varepsilon_k \delta_k) = |a_k|$. Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-M}^{M} |a_k| = \varphi\left(\sum_{k=-M}^{M} \varepsilon_k \delta_k\right) \leq \|\varphi\|.$$

Cela prouve que $a = \{a_k\} \in \ell^1$. Or φ et φ_a coïncident sur c_{00}, l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donc ils coïncident aussi sur l'adhérence de c_{00}, c'est-à-dire c_0. Donc $\varphi = \varphi_a$.

⋆

Solution 4. *Matrices bistochastiques*

Il est clair que les matrices de permutations sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$. Supposons en effet que l'on ait $P = tM + (1-t)N$, où P est une matrice de permutation, M, N sont des matrices bistochatiques, et $t \in]0,1[$. Les matrices M et N étant à coefficients positifs, si $p_{ij} = 0$, on doit nécessairement avoir $m_{ij} = n_{ij} = 0$. De même, les coefficients de M et N étant ≤ 1, si $p_{ij} = 1$ on doit avoir $m_{ij} = n_{ij} = 1$. On en déduit que $M = N = P$, ce qui prouve que P est un point extrémal de $\mathcal{B}_n$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{B}_n$ qui n'est pas une matrice de permutation. Il nous faut montrer que M n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}_n$. Puisque M n'est pas une matrice de permutation, il existe un coefficient $m_{i_1,j_1} \in]0,1[$. Comme M est stochastique, il existe un indice j_2 tel que $m_{i_1,j_2} \in]0,1[$. De même, ${}^tM$ étant stochastique, il existe un indice i_2 tel que $m_{i_2,j_2} \in]0,1[$. On construit ainsi par récurrence une suite $(j_1, i_1, j_2, i_2, \ldots)$ telle que les coefficients m_{i_k,j_k} et $m_{i_k,j_{k+1}}$ sont éléments de $]0,1[$. L'ensemble des indices étant fini, il arrive un moment où l'un des indices, de ligne ou de colonne, est répété.

On peut donc supposer que la suite $(i_1, j_1, i_2, \ldots, j_{r+1} = j_1)$ vérifie la propriété précédente, quitte à avoir commencé par le premier indice qui se répète. On construit alors une matrice B en posant $b_{i_k,j_k} = 1, b_{i_k,j_{k+1}} = -1$ (pour $1 \leq k \leq r$), $b_{i,j} = 0$ sinon. Par construction, la somme des coefficients de chaque ligne ou colonne de B est nulle. On en déduit que si $\alpha > 0$, les matrices $M + \alpha B$ et $M - \alpha B$ sont bistochastiques. De plus, on peut choisir α assez petit pour que ces matrices soient à coefficients strictement positifs. Comme M est le milieu du segment $[M + \alpha B, M - \alpha B]$, il s'ensuit que M n'est pas un point extrémal de $\mathcal{B}_n$.

Le théorème de Krein-Milman nous dit que $\mathcal{B}_n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Ceux-ci étant en nombre fini, on en déduit que toute matrice bistochastique est une combinaison convexe de matrices de permutations.

⋆

Solution 5. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via Krein-Milman*

1. Soit $A = \overline{\mathcal{A}}$. C'est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$. Soit E une partie A-antisymétrique. Comme $\mathcal{A}$ sépare les points, E est un singleton : si E contenait deux points $x \neq y$, on pourrait trouver $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$, et alors $f + \bar{f} \in A$, est réelle, et sépare x et y. Donc toute partie A-antisymétrique maximale est un singleton. Si maintenant $f \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, notons $E = \{x\}$ une partie A-antisymétrique maximale, et choisissons $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq 0$. Alors $h := \frac{f(x)}{g(x)} g \in A$, et sa restriction à E égale $f|_E$. D'après le théorème de Bishop, $f \in A$, et donc $A = C(X,\mathbb{C})$.

2. K est convexe, car c'est l'intersection de deux convexes : la boule unité de dual de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, et $A^\perp$. K est également faible-$*$ compact, car d'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de $\mathcal{M}(X,\mathbb{C}$ est compacte pour cette topologie, et $A^\perp$ est fermé faible-$*$, en tant qu'intersection de fermés faible-$*$. Si $K=\{0\}$, alors $A^\perp=\{0\}$. Donc A est dense ; or A est fermée, donc $A=\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$, et donc $g\in A$.

3. Observons déjà que $\|\mu\|=1$. Comme A est une algèbre, $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\|\in A^\perp$ et sont de norme 1. Par ailleurs, $\mu=\sigma+\tau=\|\sigma\|\frac{\sigma}{\|\sigma\|}+\|\tau\|\frac{\tau}{\|\tau\|}$, qui est bien une combinaison convexe car

$$\|\sigma\|+\|\tau\|=\int_{E_\mu}\tfrac{1}{2}(1+f)d|\mu|+\tfrac{1}{2}(1-f)d|\mu|=\int_{E_\mu}d|\mu|=1.$$

Ainsi, $\mu=\sigma/\|\sigma\|$, et donc

$$\left(1-\frac{1+f}{\int_{E_\mu}(1+f)d|\mu|}\right)d\mu=0,$$

ce qui veut dire que f est constante μ-presque partout sur E_μ (notons c sa valeur). Prouvons que cela implique que f est constante partout sur E_μ. En effet, s'il existe $x\in E_\mu$ tel que $f(x)\neq c$. Donc, grâce à la continuité de f, il existe $n\geq 1$ tel que $\mu(B_X(x,\frac{1}{n}))=0$. Dès lors, $E_\mu\setminus B_X(x,\frac{1}{n})$ est un compact qui supporte μ, ce qui contredit la minimalité de E_μ.

Étant donné $h\in A$, réelle sur E_μ, notons $f=\frac{1}{2}\frac{h}{\|h\|_{L^\infty}}$. Alors $f\in A$ et f vérifie les conditions ci-dessus, donc $f|_{E_\mu}$ est constante, c'est-à-dire que $h|_{E_\mu}$ est constante, et donc E_μ est A-antisymétrique.

4. Pour tout $\mu\in K$ extrémal, on a vu que $E_\mu=\operatorname{supp}\mu$ est A-antisymétrique. Soit g comme dans le théorème. Si $E_\mu\subseteq E$, une partie A-antisymétrique maximale, $g|_E\in A_E$, donc il existe $\tilde{g}\in A$ tel que $g|_E=\tilde{g}|_E$, et par définition de E_μ,

$$\langle g,\mu\rangle=\int_X gd\mu=\int_{E_\mu}gd\mu=\int_{E_\mu}\tilde{g}d\mu=\int_X\tilde{g}d\mu=0,$$

puisque $\tilde{g}\in A$ et $\mu\in A^\perp$. Mais $\{\nu\in\mathcal{M}(X,\mathbb{C})\mid\langle g,\nu\rangle=0\}$ est convexe et fermé faible-$*$, donc il contient l'adhérence de l'enveloppe convexe des points extrémaux de K, c'est-à-dire K (grâce au théorème de Krein-Milman). On en conclut que $\{\nu\in\mathcal{M}(X,\mathbb{C})\mid\langle g,\nu\rangle=0\}=A^\perp$. Par Hahn-Banach, $g\in\bar{A}=A$ (sinon, on pourrait séparer g de $\bar{A}$ par une forme linéaire, qui serait nulle sur $\bar{A}$ et non nulle sur g : c'est précisément ce qui ne peut pas arriver).

⋆

Solution 6. *Un contre-exemple ?*

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, notons $\varphi_k : f\mapsto\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx$. Chaque φ_k est une forme linéaire continue pour la norme uniforme, et $\mathcal{A}=\bigcap_{k<0}\ker(\varphi_k)$, donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0([0,2\pi])$. De plus, $\mathcal{A}$ est stable par multiplication, car on sait que, pour f, g continues, et $k<0$,

$$\varphi_k(fg)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\varphi_j(f)\varphi_{k-j}(g)=0.$$

Bien entendu, $\mathcal{A}$ contient la fonction constante. Enfin, $\mathcal{A}$ sépare les points, puisque si $e^{ix}\neq e^{iy}$ si $x\neq y$ modulo 2π. Mais $\mathcal{A}$ n'est pas stable par conjugaison complexe. D'ailleurs, $\mathcal{A}$ n'est pas dense : $d_{L^2}(e^{-ix},\mathcal{A})=1$, donc $\forall f\in\mathcal{A},\|f-e^{-ix}\|_\infty\leq 1$.

⋆