Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 5

Distributions

Séance du 12 mars 2018

Solution 1. *Échauffement*

La fonction $f : x \mapsto |\sin(x)| \in L^1_{\mathrm{loc}}$, on peut donc la considérer comme un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On a

$$\begin{aligned}
\langle f'', \varphi\rangle = \langle f, \varphi''\rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\sin(x)|\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx \right) \\
&\quad + \varphi(2k\pi) + 2\varphi((2k+1)\pi) + \varphi((2k+2)\pi).
\end{aligned}$$

D'où $f'' = -|\sin(x)| + 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$.

⋆

Solution 2. *Quelques exemples de distributions*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$, et supposons que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N] =: K$, avec $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le N\|\varphi\|_{\mathcal{C}^N_K(\mathbb{R})}.$$

La formule pour u définit donc bien une distribution, d'ordre au plus N sur le compact $[-N, N]$.

Supposons que u est d'ordre fini, disons N_0. Posons $K := [-N_0 - 2, N_0 + 2]$. Il existe donc une constante A_K telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans K,

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le A_K\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{N_0}_K}.$$

Montrons que cela ne peut pas arriver : soit χ une fonction lisse telle que $\chi^{(N_0+1)}(0) = 1$, et $\mathrm{supp}\,\chi \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_m(x) = \chi(m\cdot(x-(N_0+1)))$. De la sorte, pour tout $m \ge 1$, $\varphi_m^{(k)}(k) = 0$ si $0 \le k \le N_0$, et $\varphi_m^{(N_0+1)}(N_0 + 1) = m^{N_0+1}$. Donc $|\langle u, \varphi_m\rangle| = m^{N_0+1}$. Or

$$\|\varphi_m\|_{\mathcal{C}^{N_0}_K} \le Cm^{N_0},$$

où $C > 0$ ne dépend pas de m. Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $m^{N_0+1} \le Cm^{N_0}$, ce qui est absurde.

2. La fonction $x \mapsto e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*_+)$ car étant donné un compact K de $\mathbb{R}^*_+$, $e^{1/x^2} \in \mathcal{C}^0(K)$ (en particulier, localement intégrable). Par contre, considérons ϕ une fonction lisse

à support dans $]1,2[$, positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on voit que $\phi_k \to 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effet, tous les ϕ_k sont à support dans le même compact $K = [0,2]$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^m \phi_k\|_{\mathcal{C}_K^0} = 2^{-k} k^m \|\partial_x^m \phi\|_{\mathcal{C}_K^0} \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Mais

$$\langle f, \phi_k \rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{1/x^2} \phi_k(x) dx \geq e^{k^2/4} 2^{-k} \frac{1}{k} \to \infty.$$

⋆

Solution 3. *Distributions régulières*

1. L'hypothèse se reformule ainsi : pour tout $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\phi + T(\phi') = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, d'intégrale 1. Soit g une primitive de f, donc de classe C^1. On a également, par intégration par partie, l'égalité $\int f\phi + T_g(\phi') = 0$. On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(T - T_g)(\phi') = 0$, ce qui signifie que $(T - T_g)' = 0$. Supposons montré que les distributions de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ sont les seules constantes : on trouve ainsi que $T = T_g + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Donc T s'identifie à $g + c$, qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit à présent $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$. Montrons que T est constante. Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $T(\psi') = 0$. Donnons-nous $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fixée, positive, d'intégrale 1. Si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\phi(y) - \left(\int_{\mathbb{R}} \phi \right) \chi(y) \right) dy.$$

Observons que c'est seulement parce qu'on lui a retranché sa moyenne qu'une telle « primitive » de ϕ est toujours une fonction test. De la sorte, $\phi = \psi' + \left(\int_{\mathbb{R}} \phi \right) \chi$. Alors $T(\phi) = \left(\int_{\mathbb{R}} \phi \right) T(\chi)$, et donc T s'identifie à la distribution constante égale à $T(\chi)$.

2. Posons $g(x) = \exp(-\int_0^x a(t)dt)$. C'est une fonction C^∞. On peut donc calculer

$$(gu)'(\phi) = -(gu)(\phi') = -u(g\phi') = u(g'\phi - (g\phi)').$$

Mais $g' = -ag$, donc $u(g'\phi - (g\phi)') = (au + u')(g\phi) = fg\phi$. Cela prouve que $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u aussi est C^1.

3. Classiquement, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p si $p < \infty$ (on peut considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut être étendue en une application $\tilde{T}$ continue sur L^p, avec la même inégalité (grâce à la complétude de $\mathbb{R}$). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\phi) = \int_\Omega f\phi$ pour tout $\phi \in L^p$, donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

4. On va appliquer le résultat précédent. On introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Comme précédemment, il existe $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\phi = \psi' + \left(\int_0^1 \phi \right) \chi$. Ainsi,

$$T(\phi) = T(\psi') + \left(\int_0^1 \phi \right) T(\chi) = -\int_0^1 f\psi + \left(\int_0^1 \phi \right) T(\chi).$$

Mais $T(\chi)$ est une constante C, et $|\int_0^1 \phi| \leq \|\phi\|_{L^2}$, par Cauchy-Schwarz. Enfin, $\left|\int_0^1 f\psi\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de ϕ. Pour cela, on a

$$\psi^2(x) = 2\int_0^x \psi'(t)\psi(t)dt \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Quand on intègre en x, entre 0 et 1, on obtient $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$, d'où $\|\psi\|_{L^2} \leq 2\|\psi'\|_{L^2}$. Et donc

$$\|\psi\|_{L^2} \leq 2\left\|\phi - \left(\int_0^1 \phi\right)\chi\right\|_{L^2} \leq 2(1+\|\chi\|_{L^2})\|\phi\|_{L^2}.$$

Ce qui permet de conclure que

$$|T(\phi)| \leq 2(1+\|\chi\|_{L^2} + |T(\chi)|)\|\phi\|_{L^2}.$$

Par 1., T s'identifie donc à $u \in L^2(]0,1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0,1])$ avec $v(0) = 0$. Comme précédemment, pour $x \in [0,1]$, $|v(x)|^2 \leq 2\|v'\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$. Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. En reprenant les estimées précédentes, on voit que si pour $x \in [0,1]$, $u_n(x) := \int_0^x v_n(t)dt$, alors u_n est de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$, puis dans $C^0([0,1])$ grâce à l'estimée précédente. Donc u_n converge vers $\tilde{u}$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (voir la question 1.), et ainsi $u \in C^0([0,1])$.

⋆

Solution 4. *Distribution dont le support est un point*

1. Notons $K = \overline{B(0,2)}$. Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty$ à support dans K, on ait

$$|\langle u, \tilde{\varphi}\rangle| \leq C\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}_K^m}.$$

À présent, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ quelconque, écrivons $\varphi = \psi\varphi + (1-\psi)\varphi$. Comme $\operatorname{supp} u = \{0\}$, $\langle u, (1-\psi)\varphi\rangle = 0$. Ainsi, $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\|\psi\varphi\|_{\mathcal{C}_K^m} \leq C_2(\psi, m)\|\varphi\|_{\mathcal{C}_K^m}$. Donc u est d'ordre fini.

2. Par construction, $\operatorname{supp}(1-\psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0, r/2)$. Si $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\operatorname{supp}(1-\psi_r)\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,r/2)$, et donc par définition,

$$\langle u, (1-\psi_r)\phi\rangle = 0 = \langle u, \phi\rangle - \langle \psi_r u, \phi\rangle,$$

d'où le résultat.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un voisinage K_ε de 0 tel que si $|\alpha| = m$,

$$\forall x \in K, \quad |(D^\alpha\varphi)(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrons par récurrence descendante sur $|\beta|$ que

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^n,\ |\beta| \leq m,\ \forall x \in K, \quad |(D^\beta\varphi)(x)| \leq \varepsilon n^{m-|\beta|}|x|^{m-|\beta|}.$$

Pour $|\beta| = m$, c'est ce qui précède. On suppose que le résultat est démontré pour $|\beta| = k+1$. Soit β de longueur k. Alors

$$\nabla(D^\beta\varphi) = (\partial_{x_1}D^\beta\varphi, \ldots, \partial_{x_n}D^\beta\varphi).$$

Donc par hypothèse de récurrence, pour tout $x \in K_\varepsilon$,

$$\sum_{j=1}^{n} |\partial_{x_j}(D^\beta \varphi)(x)| \leq n \cdot \varepsilon(n|x|)^{m-(k+1)} \leq \varepsilon n^{m-k} |x|^{m-(k+1)}.$$

On applique alors le théorème des accroissement finis, avec $D^\beta(\varphi)(0) = 0$:

$$|D^\beta\varphi(x) - D^\beta\varphi(0)| \leq |x| \sup_{y\in[0,x]} |\nabla(D^\beta\varphi)(y)|,$$

ce qui achève la récurrence.

Soit $0 < r < 1$ assez petit pour que $\mathrm{supp}(\psi_r\varphi) \subseteq B(0,2r) \subseteq K_\varepsilon$. On calcule maintenant par la formule de Leibniz

$$D^\alpha(\psi_r\varphi)(x) = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^\beta\phi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Or pour $x \in B(0,2r) \subset K_\varepsilon$, et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha(\psi_r\varphi)(x)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|-|\beta|}} \cdot \varepsilon(2n)^{m-|\beta|} r^{m-|\alpha|} \leq C(n,m)\varepsilon\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|}},$$

puisque $r < 1$. Bien sûr, comme $\psi_r\varphi$ est nulle en dehors de $B(0,2r)$, l'inégalité ci-dessus reste valable sur $\mathbb{R}^n$. Finalement, en sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m, on obtient

$$\|\psi_r\varphi\|_{\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,m)\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^m}\varepsilon.$$

Il suffit de faire tendre $\varepsilon \to 0$ pour obtenir le résultat.

4. Soit $\tilde{K}$ le support de φ. Comme u est d'ordre m, il existe $C_{\tilde{K}}$ tel que pour toute fonction ϕ à support dans $\tilde{K}$, $|\langle u, \phi\rangle| \leq C_{\tilde{K}}\|\phi\|_{\mathcal{C}^m_{\tilde{K}}}$. Maintenant,

$$|\langle u, \varphi\rangle| = |\langle u, \psi_r\varphi\rangle| \leq C_{\tilde{K}}\|\psi_r\varphi\|_{\mathcal{C}^m_{\tilde{K}}} \to 0$$

quand $r \to 0$. Donc $\langle u, \varphi\rangle = 0$.

5. On a montré que $\bigcap_{k=0}^m \ker \delta_0^{(k)} \subset \ker u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u \in \mathrm{Vect}\{\delta_0^{(k)} \mid k \in [\![0,m]\!]\}$, ce qui est le résultat recherché.

⋆

Solution 5. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$

1. Par la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq \|\phi'\|_{L^\infty}$ (puisque $\psi(x) = \phi'(\theta_x)$, avec $\theta_x \in]0,x[$). Ainsi,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\phi(x)}{x}dx = \phi(0)\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \psi(x)dx = -\phi(0)\ln\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \psi(x)dx.$$

Un calcul similaire pour $\int_{-1}^{-\varepsilon}$ montre que le terme en $\ln\varepsilon$ disparaît. La limite existe et vaut donc

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{|x|\leq 1} \psi(x)dx.$$

Cette distribution n'est pas d'ordre 0, sinon elle apparaîtrait comme une mesure. Plus précisément, soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, positive, et égale à 1 sur $[-1,1]$.

On définit la suite $\phi_n : x \mapsto \arctan(nx)\chi(x)$. C'est une suite de fonctions continues à support compact telles que $\phi_n(0) = 0$ et $\|\phi_n\|_{\mathcal{C}^0} \leq C$, mais les $\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \phi_n \rangle$ divergent :

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi_n \rangle = 2\int_0^\infty \frac{\arctan(nx)}{x}\chi(x)dx = \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x}\chi(x/n)dx \to \infty.$$

Par contre, l'expression de ψ assure que c'est une distribution d'ordre au plus 1.

2. La fonction $x \mapsto \log|x|$ est bien localement intégrable. Calculons, pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \log|x|, \phi' \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\phi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\phi'(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log(\varepsilon)(\phi(-\varepsilon) - \phi(\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}dx \right) \\
&= -\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \phi \rangle,
\end{aligned}$$

car comme ϕ est dérivable en 0, on a $\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi \right\rangle &= \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\phi \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \phi(x)dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi = \langle \mathbb{1}, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Cela prouve que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

4. Si u est comme dans l'énoncé, on a $xu - x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 0$. Cela signifie en particulier que $\mathrm{supp}\left(u - \mathrm{vp}(\frac{1}{x})\right) \subseteq \{0\}$. On en déduit (voir l'exercice précédent) qu'il existe $c_0, \ldots, c_n$ tels que

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = \sum_{j=0}^{n} c_j \delta_0^{(j)}.$$

On a donc également $\sum_{j=0}^n c_j x\delta_0^{(j)} = 0$. Or $x\delta_0 = 0$ et pour $j \geq 1$:

$$\langle x\delta_0^{(j)}, \phi \rangle = \langle \delta_0^{(j)}, x\phi \rangle = (-1)^j (x\phi)^{(j)}(0) = j(-1)^j \phi^{(j-1)}(0) = -j\langle \delta_0^{(j-1)}, \phi \rangle.$$

Comme la famille $(\delta_0, \delta_0', \ldots)$ est libre, cela entraîne que $c_j = 0$ pour $j \geq 1$. Ainsi

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = c_0\delta_0.$$

5. Remarquons que pour $\alpha > 0$, on a

$$\langle x|x|^{\alpha-2}, \phi \rangle = \int_{|x|\geq 1} |x|^\alpha \frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{-1}^{1} |x|^\alpha \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}dx + \phi(0)\underbrace{\int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha-2}dx}_{=0}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à chacun des deux termes restants, on voit que $\langle x|x|^{\alpha-2}, \phi \rangle \to \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \phi \rangle$ quand $\alpha \to 0$ (avec $\alpha > 0$), ce que l'on voulait démontrer.

⋆

Solution 6. *Support et ordre*

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Il existe alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + \psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n de la somme vaut

$$n\phi(0) + \phi'(0)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\psi(1/j)}{j^2} - n\phi(0) - \phi'(0)\log n.$$

Or il est bien connu que que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$, et la série qui reste est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: de la sorte, $u(\phi)$ est bien défini. Ensuite, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\phi''\|_{L^\infty}$, puisque grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve explicitement

$$\psi(x) = \int_0^1 (1-y)\phi''(xy)dy.$$

On en déduit que $|u(\phi)| \leq C(\|\phi'\|_{L^\infty} + \|\phi''\|_{L^\infty})$, et u est donc d'ordre au plus 2.

2. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^\infty \{1/j\}$. Bien sûr, $S \subseteq K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V annule u, d'après les formules ci-dessus. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j - \varepsilon, 1/j + \varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. Or S est un support, donc est fermé et ainsi, automatiquement, $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

3. Un calcul direct montre que $u(\phi_k) = k$, mais comme $\partial_x^\alpha \phi_k(1/j) = 0$ si $\alpha \geq 0$ et quel que soit $j \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p}\sup_{x\in S}|\partial_x^i \phi_k(x)| = \sup_{x\in S}|\phi_k(x)| = 1.$$

On ne peut donc pas avoir $k \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela prouve que la connaissance du support d'une distribution ne permet pas de se retreindre à l'étude des fonctions sur celui-ci.

4. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type

$$|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc comme suggéré le « cut-off » de la primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose

$$\psi_k(x) = \psi(x)\int_0^x\int_0^y \phi(kt)dtdy.$$

Alors $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$ et $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est ainsi majoré par C/k.

D'autre part,

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_k(1/i) = \sum_{i=1}^{k}\psi_k(1/i) + \sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k(1/i).$$

Remarquons que, par une simple inégalité triangulaire, on voit que $|\psi_k(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}x^2/2$ si $x \in [0,1]$. Donc

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k(1/i)\right| \leq C\|\phi\|_{L^\infty}1/k.$$

Enfin, sur $[1/k,1]$, comme $t \mapsto \phi(kt)$ s'annule, ψ_k est affine de pente $1/k$, et donc

$$\sum_{i=1}^{k} \psi_k\left(\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\psi_k\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{k}\right)\right) = k\psi_k\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{\log k}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Comme $|\psi_k(x)| \lesssim \|\phi\|_{L^\infty} x^2$, $k\psi_k(1/k) = O(\frac{1}{k})$. Cela prouve que

$$u(\psi_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_k\left(\frac{1}{i}\right) \gtrsim \frac{\log k}{k},$$

d'où la conclusion.

⋆