Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 5

Topologies faible et faible $*$ (2)

Séance du 4 mars 2019

Solution 1. *Échauffement : Minimum d'une fonction convexe sur un convexe*

1.

a) Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée par C dans E^*. Soit également $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dense de E. Alors la suite $(\ell_n(x_1))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, et on peut donc trouver une extraction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\ell_{\varphi_1(n)}(x_1) \to r_1 \in \mathbb{R}$. On considère ensuite $(\ell_{\varphi_1(n)}(x_2))_n$, qui est également bornée, et l'on trouve φ_2 telle que $\ell_{\varphi_1(\varphi_2(n))}(x_2)$ ait une limite r_2.
De la même façon, on construit par récurrence une suite d'extractions φ_j telles que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r_j \in \mathbb{R}.$$

On définit alors l'extraction *diagonale* $\psi : n \in \mathbb{N} \mapsto \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$ fixé, $\ell_{\psi(n)}(x_j) \to r_j$, car c'est une suite extraite de $(\ell_{(\varphi_1\circ\ldots\varphi_j)(n)}(x_j))_j$ dès que $n \geq j$.
Pour $x \in E$ quelconque, on définit $f(x)$ par

— $f(x) = r_j$, s'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $x = x_j$.

— dans le cas contraire, on trouve $(p_k)_k$ tel que $x_{p_k} \to x$. Alors $(r_{p_k})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{N}$, donc elle converge vers un certain nombre, noté $f(x)$, qui ne dépend pas de l'extraction $(p_k)_k$ choisie. Une simple inégalité triangulaire montre que $\ell_{\psi(n)}(x) \to f(x)$.

L'application f ainsi obtenue est bien sûr linéaire. Elle est aussi continue car

$$|f(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\ell_{\psi(n)}(x)| \leq \limsup_{n\to+\infty} \|\ell_{\psi(n)}\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|.$$

Enfin, la convergence faible $*$ de $(\ell_{\psi(n)})_n$ vers f est vérifiée, comme nous l'avons observé plus haut.

b) Si E n'est pas séparable, par exemple $E = \ell^\infty(\mathbb{N})$, ce n'est plus forcément vrai, même si la boule unité de E^* est compacte pour la topologie faible $*$ $\sigma((\ell^\infty(\mathbb{N}))^*, \ell^\infty(\mathbb{N}))$ grâce au théorème de Banach-Alaoglu. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\ell_n : (u_k)_k \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Bien sûr, $\|\ell_n\|_{E^*} = 1$. Si $\ell_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \ell \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ pour $\sigma((\ell^\infty(\mathbb{N}))^*, \ell^\infty(\mathbb{N}))$, alors pour toute suite $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a $u_{n_k} = \ell_{n_k}(u) \to \ell(u)$: autrement dit, il existe une extraction telle que pour toute suite bornée, la sous-suite extraite associée soit convergente, ce qui est faux. Par exemple, on peut considérer $u_{n_{2k}} = 1$ pour $k \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ sinon.

c) *Remarque* : Si E est réflexif, on a en fait montré que toute suite bornée a une sous-suite faiblement convergente (il suffit d'appliquer ce résultat à E^*).
C'est faux si E n'est pas réflexif. Par exemple, on pose $E = L^\infty([0,1])$, et on considère $f_n(x) = \cos(n\pi x)$. On sait que $L^\infty([0,1]) = L^1([0,1])^*$. Mais pour $g \in L^1([0,1])$,

$$\int_0^1 \cos(n\pi x) g(x) \mathrm{d}x \to 0$$

(c'est le lemme de Riemann-Lebesgue, on peut par exemple le montrer par densité de $\mathcal{C}^1([0,1])$ dans $L^1([0,1])$). Par conséquent, $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la convergence faible $*$. Cela signifie que si une sous-suite $(f_{n_k})_k$ tend faiblement vers g, alors en particulier elle tend vers g pour la topologie faible $*$ donc $g = 0$. Pour montrer que $(f_n)_n$ n'a pas de sous-suite faiblement convergente, il suffit donc de montrer que $(f_n)_n$ n'a pas de sous-suite extraite tendant faiblement vers 0. Pour cela, on définit $\ell : f \in \mathcal{C}^0([-1,1]) \mapsto f(1) \in \mathbb{R}$. C'est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}^0([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Par le théorème de prolongement de Hahn-Banach, on peut l'étendre en une forme linéaire continue sur $L^\infty([-1,1])$, toujours notée ℓ. Mais alors $\ell(f_n) = (-1)^n$ n'a pas de sous-suite extraite tendant vers 0, ce qui empêche la convergence faible vers 0.

2.

a) Clairement, C est contenu dans l'intersection des $\varphi^{-1}([\lambda, +\infty[)$, $\varphi \in H^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour montrer l'inclusion inverse, on fait comme dans le cours pour montrer qu'un convexe fortement fermé est faiblement fermé. Soit $x \in C^c$. On va montrer que x n'est pas dans l'intersection des demi-espaces fermés contenant C. Pour cela, on applique le théorème de Hahn-Banach au convexe compact $\{x\}$ et au convexe fermé C : il existe $\varphi \in H^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $C \subset \varphi^{-1}([\lambda, +\infty[)$ et $\varphi(x) < \lambda$. C'est exactement le résultat désiré.

   Maintenant, soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de C qui converge faiblement vers $u \in H$. On va utiliser la caractérisation de C. Soit $\varphi \in H^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $C \subset \varphi^{-1}([\lambda, +\infty[)$. Alors $\varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u)$ par convergence faible, donc $\varphi(u) \geq \lambda$. En passant à l'intersection, on a montré que $u \in C$.

b) Soit $(u_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour f : $f(u_n) \longrightarrow m$ où $m = \inf_{x \in C} f(x)$.

   Comme la suite $(u_n)_n$ est bornée, f tendant vers $+\infty$ à l'infini, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente vers $u \in H$ grâce à la première question. On n'a pas forcément supposé que H était séparable, mais on contourne la difficulté de la façon suivante. On pose $D = \mathrm{Vect}(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et alors $H = \overline{D} \oplus D^\perp$, la somme directe étant orthogonale. On applique la première question à $\overline{D}$, et on obtient la convergence faible d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ vers u dans $\overline{D}$. Ensuite, pour $x \in H$, on décompose $x = y + z$ où $y \in \overline{D}$ et $z \in D^\perp$. Alors

$$\langle u_{\varphi(n)}, x \rangle = \langle u_{\varphi(n)}, y \rangle \longrightarrow \langle u, y \rangle = \langle u, x \rangle.$$

   Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ converge faiblement vers u dans H.

   Mais C est séquentiellement faiblement fermé, donc u appartient à C. Il faut maintenant montrer que $f(u) \leq m$. Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $f(u_n) \leq m + \epsilon$. Mais $f^{-1}(]-\infty, m+\epsilon])$ est un convexe (car f est convexe) donc il est séquentiellement faiblement fermé. On en déduit que $f(u) \leq m + \epsilon$.

⋆

Solution 2. *Sur l'adhérence séquentielle faible*

Rappelons que, d'après la formule de Parseval, $e_n \rightharpoonup 0$ (et ce quelle que soit la base hilbertienne de H considérée). Supposons qu'il existe deux suites d'entiers $(m_k)_k$ et $(n_k)_k$ telles que $e_{m_k} + m_k e_{n_k} \rightharpoonup 0$.

- Premier cas : si $(m_k)_k$ est bornée, quitte à extraire de nouveau, on peut supposer m_k constant, valant m. Alors n_k est nécessairement non bornée (sans quoi la suite ci-dessus prendrait une infinité de fois la valeur $e_m + m e_n$ et ne pourrait pas converger faiblement vers 0), et donc $m e_{n_k} \rightharpoonup 0$. Ainsi $e_m + m e_{n_k} \rightharpoonup e_m \neq 0$, c'est contradictoire.
- Second cas : si $(m_k)_k$ n'est pas bornée, alors $\|e_{m_k} + m_k e_{n_k}\| \geq m_k - 1$, donc la suite n'est pas bornée en norme. Elle ne saurait donc converger faiblement, car on sait (par Banach-Steinhaus) que si $x_n \rightharpoonup x$ dans un espace vectoriel normé, alors $(x_n)_n$ est fortement bornée.

Cela prouve que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F. Par contre, e_m y appartient pour tout $m \in \mathbb{N}$ (comme limite faible de $e_m + me_n$ quand $n \to +\infty$), et comme $e_m \rightharpoonup 0$, 0 est dans la « double » adhérence. Cela prouve en particulier que l'adhérence séquentielle faible d'un ensemble n'est pas, en général, faiblement fermée.

⋆

Solution 3. *Convexes fermés fort et non fermés faible $*$*

1. Comme pour tout $u, v \in \ell^\infty$, et $\lambda > 0$, on a $\liminf \lambda u = \lambda \liminf u$, et $\liminf(u + v) \geq \liminf u + \liminf v$, on voit que C est convexe. D'autre part, si $u^n \to u$ fortement dans ℓ^∞, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{k\to+\infty} u_k \geq \liminf_{k\to+\infty}(u_k - u_k^n) + \liminf_{k\to+\infty} u_k^n \geq -\|u - u^n\|_\infty,$$

et en faisant tendre $n \to \infty$, on trouve $\liminf_{k\to+\infty} u_k \geq 0$. Donc C est un fermé fort.

Par contre, considérons la suite $u^n \in C$ définie par $u_k^n = -\mathbb{1}_{k\leq n}$. On voit que $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} -\mathbb{1}$, mais $-\mathbb{1} \notin C$. Si C était fermé faible $*$, C^c contiendrait tous les u^n pour n assez grand, ce qui n'est pas le cas.

2. Par définition de la non-réflexivité, il existe une forme linéaire $\psi \in E^{**}$ fortement continue qui ne soit pas de la forme φ_x. Le noyau d'une telle forme est fermé fort dans E^*. S'il était fermé faible $*$, ψ serait une forme linéaire continue pour la topologie $\sigma(E^*, E)$, donc une évaluation φ_x, d'après l'exercice 4 du TD n° 4 : c'est absurde.

Rappelons comment montrer que les formes linéaires continues pour la topologie $\sigma(E^*, E)$ sont les évaluations. Soit ψ une forme linéaire sur E^* qui est continue pour la topologie $\sigma(E^*, E)$. L'ensemble $\psi^{-1}(\,]-1,1[\,)$ est donc un voisinage ouvert de 0 dans E^* pour cette topologie, d'où l'existence de vecteurs $x_1, \ldots, x_N \in E$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{\ell \in E^*;\ \forall j = [\![1, N]\!];\ |\ell(x_j)| < \varepsilon\} \subseteq \psi^{-1}(\,]-1,1[\,).$$

Cela implique en particulier que

$$\bigcap_{j=1}^{N} \ker(\varphi_{x_j}) \subseteq \psi^{-1}(\,]-1,1[\,),$$

et c'est même un sous-ensemble de $\ker\psi$, car cette intersection est un sous-espace vectoriel de E^* sur lequel ψ est bornée (pour y dans cette intersection, pour tout λ, λy est dans l'intersection donc $|\psi(\lambda y)| < 1$). Par le lemme des noyaux, il existe donc des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tels que

$$\psi = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \varphi_{x_j},$$

c'est-à-dire que ψ est l'évaluation en x, avec $x := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j x_j$.

⋆

Solution 4. *Théorème de Eberlein-Šmulian*

1. Soit $(x_n)_n$ une famille dénombrable dense de E. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on fabrique (grâce au théorème de Hahn-Banach) une forme linéaire $\ell_n \in E^*$ de norme 1, et telle que $\ell_n(x_n) = \|x_n\|$. Montrons qu'alors $(\ell_n)_n$ sépare les points. En effet, si $x \in E$ est tel que $\ell_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, trouvons une suite d'entiers $(n_k)_k$ telle que $x_{n_k} \to x$ quand $k \to +\infty$. Alors

$$\|x_{n_k}\| = |\ell_{n_k}(x_{n_k})| = |\ell_{n_k}(x_{n_k} - x)| \leq \|\ell_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k} - x\| = \|x_{n_k} - x\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

donc $x_{n_k} \to 0$, et ainsi $x = 0$.

2. Soient A un compact faible de E et $(\ell_n)_n$ cette famille séparante ; on peut supposer que $\|\ell_n\|_{E^*} = 1$. On pose

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|\ell_n(x-y)|.$$

L'application d vérifie toutes les propriétés d'une distance.

Ensuite, rappelons que, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, A, en tant que compact faible, est borné pour la norme. En effet, pour $\ell \in E^*$,

$$A \subset \bigcup_{x\in A} \{y \in E;\ |\ell(y)| < |\ell(x)| + 1\}$$

donc par compacité faible, il existe en fait $C > 0$ tel que $A \subset \{y;\ |\ell(y)| < C\}$. Par conséquent, la famille $\varphi_x : \ell \in E^* \mapsto \ell(x) \in \mathbb{R}$ est telle que $(\varphi_x(\ell))_{x\in A}$ est bornée pour tout $\ell \in E^*$, donc par le théorème de Banach-Steinhaus, $(\varphi_x)_{x\in A}$ est bornée pour la norme d'opérateur : il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| \leq C$.

La topologie induite sur A par d est donc moins fine que la topologie faible : en effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{j=N+1}^{\infty} C2^{-j} \leq \varepsilon/2$; ainsi $\{x \in A;\ |\ell_j(x)| \leq (N+1)^{-1}\varepsilon/2, \forall j \leq N\} \subset B_d(0,\varepsilon)$. Cela signifie donc que l'application id : $(A, \sigma(E,E^*)) \to (A,d)$ est bijective, continue, partant d'un compact. C'est donc un homéomorphisme, *i.e.* les deux topologies coïncident.

3. On rappelle que l'adhérence forte ou faible est la même pour un convexe dans un espace topologique localement convexe séparé.

L'ensemble $A\cap F$ est compact pour la topologie faible sur E (car fermé dans un compact). On montre que c'est un compact pour la topologie faible sur F. En effet, la topologie faible sur F est la topologie induite par la topologie faible sur E, car si V est un voisinage faible de 0 pour $\sigma(F,F^*)$, alors il existe $\ell_1,\dots,\ell_N \in F^*$, et $\varepsilon > 0$ tels que V contienne l'ensemble $\bigcap_{n=1}^{N}\{x \in F;\ |\ell_n(x)| < \varepsilon\}$, et en prolongeant chacune de ces formes linéaires à E tout entier grâce au théorème de Hahn-Banach, on trouve bien que V s'écrit comme l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 pour $\sigma(E,E^*)$. Inversement, toute restriction à F d'une forme linéaire continue sur E appartient à F^*, donc l'intersection avec F d'un voisinage faible de 0 dans E est toujours un voisinage faible de 0 dans F. Ainsi, comme $A\cap F$ est un compact pour $\sigma(E,E^*)$ inclus dans F, c'est donc un compact pour $\sigma(F,F^*)$.

En tant que compact faible d'un espace normé séparable F, $A\cap F$ est métrisable d'après les questions précédentes, donc séquentiellement faiblement compact (toujours pour $\sigma(F,F^*)$). Ainsi $(a_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente au sens de $\sigma(F,F^*)$; mais comme la restriction à F d'un forme linéaire $\ell \in E^*$ est une forme linéaire continue sur F, cette sous-suite est bien faiblement convergente au sens $\sigma(E,E^*)$. On a bien extrait d'une suite de A une sous-suite faiblement convergente.

4. On reprend l'exemple de la question 1.b) de l'exercice 1. On considère $(\ell^\infty(\mathbb{N}))^*$ dont la boule unité est $\sigma((\ell^\infty(\mathbb{N}))^*, \ell^\infty(\mathbb{N}))$ compacte, grâce au théorème de Banach-Alaoglu. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\ell_n : (u_k)_k \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Bien sûr, $\|\ell_n\|_{E^*} = 1$. Si $\ell_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \ell \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ pour $\sigma((\ell^\infty(\mathbb{N}))^*, \ell^\infty(\mathbb{N}))$, alors pour toute suite $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, on a $u_{n_k} = \ell_{n_k}(u) \to \ell(u)$: autrement dit, il existe une extraction telle que pour toute suite bornée, la sous-suite extraite associée soit convergente, ce qui est faux. Par exemple, on peut considérer $u_{n_{2k}} = 1$ pour $k \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ sinon.

$\star$

Solution 5. *Le théorème de Stone-Weierstrass complexe via celui de Krein-Milman*

1. Soit $A = \overline{\mathcal{A}}$. C'est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{C})$. Soit E une partie A-antisymétrique. Comme $\mathcal{A}$ sépare les points, E est un singleton : si E contenait deux points $x \neq y$, on pourrait trouver $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Alors $f + \bar{f}$, $-i(f - \bar{f}) \in A$, sont réelles, donc elles seraient constantes

sur E, mais l'une au moins sépare x et y, ce qui est impossible. Donc toute partie A-antisymétrique maximale est un singleton. Si maintenant $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$, notons $E = \{x\}$ une partie A-antisymétrique maximale, et choisissons $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq 0$. Alors $h := \frac{f(x)}{g(x)} g \in A$, et sa restriction à E égale $f|_E$. Donc $f|_E \in A_E$. D'après le théorème de Bishop, $f \in A$, et donc $A = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$.

2. K est convexe, car c'est l'intersection de deux convexes : la boule unité de dual de $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$, et $A^\perp$. K est également faible $*$ compact, car d'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ est compacte pour cette topologie, et $A^\perp$ est fermé faible $*$, en tant qu'intersection de fermés faible $*$. Si $K = \{0\}$, alors $A^\perp = \{0\}$. Donc A est dense (d'après un corrolaire du théorème de Hahn-Banach) ; or A est fermée, donc $A = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$, et donc $g \in A$.

3. Observons déjà que $\|\mu\| = 1$. Comme A est une algèbre, $\sigma/\|\sigma\|$ et $\tau/\|\tau\| \in A^\perp$ et sont de norme 1. Par ailleurs, $\mu = \sigma + \tau = \|\sigma\| \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + \|\tau\| \frac{\tau}{\|\tau\|}$, qui est bien une combinaison convexe car

$$\|\sigma\| + \|\tau\| = \int_{E_\mu} \tfrac{1}{2}(1+f) d|\mu| + \tfrac{1}{2}(1-f) d|\mu| = \int_{E_\mu} d|\mu| = 1.$$

Ainsi, $\mu = \sigma/\|\sigma\|$, et donc

$$\left(1 - \frac{1+f}{\int_{E_\mu}(1+f)d|\mu|}\right) d\mu = 0,$$

ce qui veut dire que f est constante μ-presque partout sur E_μ (notons c sa valeur). Prouvons que cela implique que f est constante partout sur E_μ. En effet, s'il existe $x \in E_\mu$ tel que $f(x) \neq c$, grâce à la continuité de f, il existe $n \geq 1$ tel que $f \neq c$ sur $B_X(x, \frac{1}{n})$. Donc $\mu(B_X(x, \frac{1}{n}) \cap E_\mu) = 0 = \mu(B_X(x, \frac{1}{n}))$. Dès lors, $E_\mu \setminus B_X(x, \frac{1}{n})$ est un compact qui supporte μ, ce qui contredit la minimalité de E_μ.

Étant donné $h \in A$, à valeurs réelles, notons $f = \frac{1}{2} \frac{h}{\|h\|_{L^\infty}}$. Alors $f \in A$ et f vérifie les conditions ci-dessus, donc $f|_{E_\mu}$ est constante, c'est-à-dire que $h|_{E_\mu}$ est constante. Si h est complexe, il suffit de considérer $\mathrm{Re}(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$ qui sont dans A. Donc E_μ est A-antisymétrique.

4. Soit g comme dans le théorème. Pour tout $\mu \in K$ extrémal, on a vu que $E_\mu = \operatorname{supp} \mu$ est A-antisymétrique. Si $E_\mu \subseteq E$, une partie A-antisymétrique maximale, $g|_E \in A_E$, donc il existe $\tilde{g} \in A$ tel que $g|_E = \tilde{g}|_E$, et par définition de E_μ,

$$\langle g, \mu \rangle = \int_X g d\mu = \int_{E_\mu} g d\mu = \int_{E_\mu} \tilde{g} d\mu = \int_X \tilde{g} d\mu = 0,$$

puisque $\tilde{g} \in A$ et $\mu \in A^\perp$. Mais $\{\nu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C});\ \langle g, \nu \rangle = 0\}$ est convexe et fermé faible $*$, contenant les points extrémaux de K donc il contient l'adhérence de l'enveloppe convexe des points extrémaux de K, c'est-à-dire K (grâce au théorème de Krein-Milman). On en conclut que $\{\nu \in \mathcal{M}(X, \mathbb{C});\ \langle g, \nu \rangle = 0\} = A^\perp$. Par Hahn-Banach, $g \in \bar{A} = A$ (sinon, on pourrait séparer g de $\bar{A}$ par une forme linéaire, qui serait nulle sur $\bar{A}$ et non nulle sur g : c'est précisément ce qui ne peut pas arriver).

5. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, notons $\varphi_k : f \mapsto \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. Chaque φ_k est une forme linéaire continue pour la norme uniforme, et $\mathcal{A} = \bigcap_{k<0} \ker(\varphi_k)$, donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$. De plus, $\mathcal{A}$ est stable par multiplication, car on sait que, pour tout f, g dans $\mathcal{A}$ et tout $k < 0$,

$$\varphi_k(fg) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(f) \varphi_{k-j}(g) = 0.$$

Bien entendu, $\mathcal{A}$ contient la fonction constante 1. Enfin, $\mathcal{A}$ sépare les points, puisque $e^{ix} \neq e^{iy}$ si $x \neq y$ modulo 2π. Mais $\mathcal{A}$ n'est pas stable par conjugaison complexe. D'ailleurs, $\mathcal{A}$ n'est pas dense : $d_{L^2}(e^{-ix}, \mathcal{A}) = 1$, donc $\forall f \in \mathcal{A}, \|f - e^{-ix}\|_\infty \geq \|f - e^{-ix}\|_2 \geq 1$.

$\star$