# Correction du Td n° 6 d'Analyse fonctionnelle

## Fonctions harmoniques

Séance du 21 mars 2014

**Solution 1.** *Solution élémentaire du laplacien*

1. On calcule

$$\Delta(|x|^\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(ax_i|x|^{a-2}) = (Na + a(a-2))|x|^{a-2}.$$

2. Sur ${}^cB(0,\epsilon)$ on a $\Delta|x|^{2-N} = 0$ et donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}$

$$0 = \int_{{}^cB(0,\epsilon)} \Delta(|x|^{2-N})\phi = \int_{{}^cB(0,\epsilon)} (\Delta\phi)|x|^{2-N} + \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

En prenant la limite quand $\epsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$\int (\Delta\phi)|x|^{2-N} = lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\phi\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} - |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi).$$

On conclut donc car au sens des distributions $< \Delta|x|^{2-N}, \phi >=< |x|^{2-N}, \Delta\phi >$.

3. On remarque

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi\frac{\partial}{\partial n}|x|^{2-N} = (2-N)\int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi|x|^{1-N} \longrightarrow (2-N)|\mathbb{S}^{N-1}|\phi(0)$$

$$\int_{\partial B(0,\epsilon)} |x|^{N-2}\frac{\partial}{\partial n}\phi \longrightarrow 0.$$

4. Si $f$ est une distribution à support compact, alors $u = |x|^{N-2} * f$ est bien définie comme convolution d'une distribution et d'une distribution à support compact et on a

$$-\Delta(|x|^{N-2} * f) = (-\Delta|x|^{N-2}) * f = (N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|f,$$

donc $\frac{1}{(N-2)|\mathbb{S}^{N-1}|}|x|^{N-2} * f$ est solution de $-\Delta u = f$ au sens des distributions. Ensuite, en dehors de $\mathrm{supp}(f) + 1$, $u$ est égale à

$$(\chi(|x|)|x|^{N-2}) * f,$$

où $\chi(r)$ est une fonction qui vaut 1 pour $r > 1$ et 0 au voisinage de 0. En effet, si $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \setminus (\mathrm{supp}(f) + 1))$ on a

$$< u, g >=< |x|^{2-N}, f * g >=< |x|^{2-N}\chi(|x|), f * g >$$

car $\mathrm{supp}(f * g) \subset \mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)$, qui ne contient pas $B(0,1)$. $(\chi(|x|)|x|^{N-2})$ est $C^\infty$ donc $(\chi(|x|)|x|^{N-2}) * f$ aussi.

On montre maintenant que $u$ tend vers 0 à l'infini. Soit $k$ l'ordre de $f$ ($f$ est à support compact donc d'ordre fini). On a

$$|u(x)| = | < f, \frac{\chi(x-.)}{|x-.|^{N-2}} > | \leq C \sup_{i\leq k, y\in \mathrm{supp}(f)+1} |\partial^i (\frac{\chi(x-.)}{|x-.|^{N-2}})| \to 0.$$

5. On raisonne comme dans les questions 1 et 2 en remarquant $\Delta ln(|x|) = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

$\star$

**Solution 2.** *Fonction de Green pour le demi-espace : le noyau de Poisson*

1. Si $y \in \partial\Omega$ alors $|y - x^*| = |y - x|$, donc $\Phi(y - x^*) = \Phi(y - x)$.
2. $\Phi(y - x^*)$ est $C^\infty$ pour $y, x \in \Omega$ donc $\Delta\Phi^x = 0$ sur $\Omega$.
3. On calcule, pour $x$ fixé,

$$-\frac{\partial G}{\partial \nu_\Omega}(x,y) = (n-2)\frac{1}{(n-2)mes(\mathbb{S}^{n-1})}\left(\frac{y_n - x_n}{|y-x|^N} - \frac{y_n - x_n^*}{|y-x|^n}\right) = \frac{2}{mes(\mathbb{S}^{n-1})}\frac{x_n}{|y-x|^n}.$$

4. On procède par récurence, en remarquant

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|y-x|} dS_y &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{1}{((y_1-x_1)^2 + ... + (y_{n-1} - x_{n-1})^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dy_1..dy_{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-3}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + .. + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} dy_1 dy_2 \right) dy_3..dy_{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-3}} \left( 2\pi \int_0^r \frac{rdr}{(r^2 + y_3^2 + .. + x_n^2)^{\frac{n}{2}}} \right) dy_3..dy_{n-1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-3}} \frac{\pi}{\frac{n}{2} - 1} \frac{1}{(y_3^2 + .. + x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}} dy_3..dy_{n-1}
\end{aligned}$$

Si $n$ est paire, à la dernière étape on utilise $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$.

5. soit $\chi(y_n)$ une fonction telle que $\chi(0) = 1$. On calcule

$$u(x) = -\int g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} = -\int_\Omega g(y)\chi(y_n)\delta_y G dy + \int_\Omega \Delta_y(g(y)\chi(y_n))G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\frac{\partial \chi g}{\partial \nu}$$

Comme $G(x, y) = 0$ pour $y \in \partial\Omega$, le dernier terme vaut 0. Le premier est nul aussi car $\Delta G = 0$. On a donc

$$u(x) = \int_\Omega \Delta_y(g(y)\chi(y_n))G(x,y)dy,$$

donc

$$\Delta u = \int \Delta_y(g(y)\chi(y_n))\Delta_x G(x,y)dy = 0.$$

Par ailleur $u$ est $C^\infty$ sur $\Omega$, et

$$|u(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} \frac{2x_n}{mes(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|y-x|^n} dS_y \leq \|g\|_{L^\infty},$$

donc $u \in L^\infty \bar{\Omega}$.

6. Soient $z \in \partial\Omega$ et $\varepsilon > 0$ fixé. D'après la continuité de $g$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$|y - z| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(y) - g(z)| < \varepsilon\,.$$

On se donne $x \in \Omega$ tel que $|x-z| < \delta_\varepsilon/2$. On a alors

$$\begin{aligned}|u(x)-g(z)| &= \left|\frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{g(y)-g(z)}{|x-y|^n}dS_y\right| \\ &\leq \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\Omega\cap B_{\delta_\varepsilon}(z)}\frac{|g(y)-g(z)|}{|x-y|^n}dS_y + \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\partial\Omega\setminus B_{\delta_\varepsilon}(z)}\frac{|g(y)-g(z)|}{|x-y|^n}dS_y\,.\end{aligned}$$

- On montre que la première intégrale du membre de droite de cette inégalité est inférieur à $\varepsilon$.
- On montre que si $|y-z| > \delta$ alors $|y-x| \geq |y-z|/2$.
- On en déduit que la seconde intégrale est majorée par

$$\frac{2^{n+2}x_n\|g\|_\infty}{n\omega_n}\int_{\partial\Omega\setminus B_{\delta_\varepsilon}(z)}|y-z|^{-n}dS_y\,.$$

- On en déduit que la seconde intégrale tend vers 0 quand $x_n \to 0$.

⋆

**Solution 3.** *Inégalité de Harnack*

1. On remarque, pour $r \leq R$,

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} \leq \frac{R+r}{R-r}$$

On multiplie par $\frac{1}{2\pi}u(a+Re^{it})$ et on intégre pour $t$ entre 0 et $2\pi$. On obtient, grâce à la formule de Poisson

$$\forall 0 \leq r < R, \quad \frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a).$$

2. Soit $R$ tel que $\forall x \in K$, $B(x,R) \subset \Omega$. Il existe un recouvrement fini de $K$ par des boules $B(x_i, \frac{R}{2})$. Soit $N$ le nombre de boules, on a alors, pour tout $x, y \in K$

$$u(x)\frac{1}{3^N} \leq u(y) \leq u(x)3^N.$$

3. Soit $z \in \Omega$. $u_n(z)$ est une suite croissante, donc soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Si elle converge, alors l'inégalité précédente nous dit que pour tout $y$, $u_n(y)$ est bornée donc converge. Le théorème de Dini nous dit donc que la suite $u_n$ converge uniformément sur les compact. La limite $u$ satisfait donc la propriété de Poisson donc est harmonique. Si $u_n(z) \to \infty$, alors l'inégalité de la question précédente nous dit que pour tout $y$, $u_n(y) \to \infty$.

⋆

**Solution 4.** *Estimation des dérivées d'une fonction harmonique*

1. Si $v$ est harmonique, la propriété de la moyenne peut s'écrire de manière équivalente

$$v(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{B_r(x_0)} v(y)dy.$$

Si $u$ est harmonique, alors $\frac{\partial u}{\partial_{x_j}}$ l'est aussi, donc

$$\frac{\partial u}{\partial_{x_j}} = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial_{x_j}} dy = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y)\nu_j(y).$$

2. On remarque

$$\int_{\partial B_r(x_0)} \nu_j(y) = 0$$

donc

$$|\frac{\partial u}{\partial_{x_j}}| \leq \int_{\partial B_r(x_0)} (u(y) - m)\nu_j(y) \leq C_n \frac{M - m}{r}.$$

3. Par le principe du maximum, on a pour tout $x \in \Omega$, $m \leq u(x) \leq M$. On applique donc la question précédente pour tout $r$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Comme $d(x, \partial\Omega)$ est le suprémum de tels $r$ on conclue.

4. Grâce à l'estimation précédente, si $u_n$ est bornée, alors ses dérivées sont uniformément bornées sur tout les compact (ainsi que les dérivées d'ordre supérieur, en remarquant que sur les compact, $\partial u_n$ est uniforment bornée et harmonique). On peut donc appliquer le théorème d'Arzela Ascoli.

$\star$