Correction du Td n° 5 d'Analyse fonctionnelle

Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet

Séance du 13 mars 2015

Solution 1. *Estimation de Weyl*

1. Soit $V_n = vect(e_1, .., e_n)$. On a alors $\max_{\substack{u \in V, \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2 = \lambda_n$. Maintenant, si $dim(V) \geq n$, on considère $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto (< e_1, v >, ..., < e_n, v >)$. Alors soit $Ker(\Phi) = \{0\}$, et dans ce cas $Im(V) = \mathbb{R}^n$, donc il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $< e_i, v >= 0$ pour $i \leq n-1$, soit il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\Phi(v) = 0$. Dans les deux cas, un tel v satisfait

$$\|\nabla v\|^2 \geq \lambda_n \|v\|^2.$$

2. Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors $H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$, ce qui permet de conclure.

3. Les vecteurs propres sont les $\sin(\pi k_1 x_1/a) ... \sin(\pi k d x_d/a)$, avec $k_i \in \mathbb{N}$ et les valeurs propres associés sont les

$$\frac{\pi^2}{a^2} \sum k_i^2.$$

4. $N_{]0,a[^d}(\lambda)$ est égal au nombre de points à coordonnées entières positives dans la boule de rayon $\sqrt{\lambda}\frac{a}{\pi}$. On a donc

$$N_{]0,a[^d}(\lambda) \sim \lambda^{\frac{d}{2}} vol(\mathbb{B}_1) \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d.$$

5. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega_1)$, on note $u \oplus v$ l'élément de $H_0^1(\Omega_2)$ qui est donné par u sur $]0, a[^d$ et par v sur $(a, 0, .., 0) +]0, a[^d$. On considère le sous-espace de $H_0^1(\Omega_2)$, de dimension $2n$, engendré par les $e_i \oplus 0$, $0 \oplus e_i$ avec $i \leq n$. On a

$$\max_{\substack{u \in V, \\ \|u\|_{L^2}=1}} = \lambda_n$$

et donc $\lambda_{2n}(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$.

6. Pour tout ouvert Ω_K composé de K petites briques de la forme $]0, a[^d$ contenu dans Ω, on a

$$C_\lambda K \lambda^{\frac{d}{2}} vol(\mathbb{B}_1) \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d \leq N_{\Omega_K}(\lambda) \leq N_\Omega(\lambda),$$

avec $C_\lambda \to 1$ quand $\lambda \to \infty$. donc

$$\frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \geq C_\lambda vol(\mathbb{B}_1) \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d K a^d.$$

Or $Ka^d \longrightarrow |\Omega|$ quand on approche par Ω par des ouverts constitués de briques de plus en plus petites. En faisant ensuite tendre λ vers ∞, on obtient le résultat souhaité.

⋆

Solution 2. *Problème de Neumann*

1. La forme $a(u,v) = \int \nabla u.\nabla v + uv$ est continue sur H^1 et corecive. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram qui nous donne l'existence d'un unique $u \in H^1$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \int \nabla v.\nabla u + uv = \int fv.$$

2. En appliquant la formule précédente à $v = u$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$$

L'application $(-\Delta + I)^{-1}$ est donc continue $L^2 \to H^1$. Comme l'injection de H^1 dans L^2 est compacte, l'application $(-\Delta + I)^{-1} : L^2 \to L^2$ est compacte. Soit $f, g \in L^2$. En appliquant la définition de solution faible avec $u = (-\Delta + I)^{-1}g$ et $v = (-\Delta + I)^{-1}f$ on obtient le résultat souhaité.

3. $(-\Delta + I)^{-1}$ est autoadjoint compacte donc il existe une base orthonormale e_n de L^2 et une suite $\mu_n > 0$ décroissante tendant vers 0 telle que

$$(-\Delta + I)^{-1}e_n = \mu_n e_n.$$

On pose ensuite $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$.

⋆