

Corrigé d'analyse fonctionnelle TD n° 6

OPÉRATEURS COMPACTS

Séance du 8 mars 2017

Solution 1. *Échauffement*

Étudions la continuité de M_a . Si $a \in \ell^\infty$, on a clairement

$$\|M_a(u)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |u_n|^2 \leq \|a\|_{\ell^\infty}^2 \|u\|_{\ell^2}^2.$$

Donc M_a est continu, et $\|M_a\| \leq \|a\|_{\ell^\infty}$. Réciproquement, s'il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in \ell^2$, $\|M_a(u)\|_{\ell^2} \leq C \|u\|_{\ell^2}$, alors $|a_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: en effet, si $a_n \neq 0$, on applique l'inégalité précédente avec la suite dont seul le n -ième terme est non nul, et vaut $|a_n|/a_n$.

Étudions la compacité de M_a . Si $a_n \rightarrow 0$, on peut considérer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la suite $a^N = \{a_n^N\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_n^N = \begin{cases} a_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit que $\|a^N - a\|_{\ell^\infty} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. Donc $\|M_{a^N} - M_a\| \rightarrow 0$. Or M_{a^N} est de rang fini. Donc M_a est compact, en tant que limite en norme opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.

Inversement, si M_a est compact, considérons la suite δ^n , les suites valant 1 au rang n , et 0 ailleurs. C'est une suite faiblement convergente dans ℓ^2 , vers 0, donc la suite $M_a(\delta^n)$ est fortement convergente dans ℓ^2 vers 0 (voir l'exercice suivant). Or $\|M_a(\delta^n)\|_{\ell^2} = |a_n|$, donc $a_n \rightarrow 0$.

★

Solution 2. *Un opérateur compact « renforce » la convergence*

Si T est compact, et si $\{e_n\}$ est une suite de E qui converge faiblement vers e , alors la suite $\{e_n\}$ est bornée. Donc $\{Te_n\}$ est une suite dans un compact de F . Soit f une valeur d'adhérence (forte) de cette suite, et $\ell \in F^*$. Alors $\langle \ell, Te_n \rangle = \langle T^*(\ell), e_n \rangle$, et en passant à la limite des deux côtés de l'égalité, on trouve $\langle \ell, f \rangle = \langle T^*(\ell), e \rangle = \langle \ell, Te \rangle$. Donc par Hahn-Banach, $f = Te$. La suite $\{Te_n\}$ ayant pour seule valeur d'adhérence Te , elle converge vers Te .

Réciproquement, si T transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente, montrons que $T(B_E)$ est compact, où B_E est la boule unité de E . Soit donc une suite $\{f_n\}$ de $T(B_E)$. Écrivons $f_n = T(e_n)$, avec $e_n \in B_E$. Or la suite $\{e_n\}$ est bornée, donc d'après le théorème de Kakutani (et celui d'Eberlein-Šmulian pour l'équivalence entre la notion de compacité et de compacité séquentielle pour la topologie faible), $\{e_n\}$ admet une valeur d'adhérence faible, notée e^∞ . Donc par hypothèse, $f^\infty := Te^\infty$ est une valeur d'adhérence forte de $\{f_n\}$, ce qui prouve que $T(B_E)$ est (séquentiellement) fortement compact.

★

Solution 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | T e_n)$, donc la formule de Parseval donne $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p | T e_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p | T e_n)|^2 = \sum_n \|T e_n\|^2,$$

car (f_p) est une base hilbertienne de H (tous les termes étant positifs, l'interversion des sommations est licite). Étant donnée une autre base hilbertienne (\tilde{e}_n) de H , on a également $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraîne que $\sum_n \|T \tilde{e}_n\|^2 < \infty$, et l'égalité demandée. Autrement dit, le calcul de $\|T\|_{HS}$ ne dépend pas de la base considérée.

2. Soit $x \in H$ de norme 1. La formule de Parseval appliquée à Tx donne

$$\|Tx\|^2 = \sum_n |(Tx | e_n)|^2 = \sum_n |(x | T^* e_n)|^2 \leq \sum_n \|T^* e_n\|^2 = \|T^*\|_{HS}^2.$$

Or, d'après le calcul précédent, $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$, ce qui prouve que T est continu, de norme $\leq \|T\|_{HS}$.

3. Soit $\{u^n\}$ une suite de H telle que $u_n \rightarrow 0 \in H$ faiblement. On note $u_n = \sum_m a_m^n e_m$. La convergence convergence faible implique que pour tout $m \in \mathbb{N}$ fixé, $a_m^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $\{u_n\}$ est bornée, il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_m |a_m^n|^2 \leq C^2.$$

T étant continue, $Tu_n = \sum_m a_m^n T e_m$. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

- il existe M tel que $\sum_{m \geq M} \|T e_m\|^2 \leq \varepsilon^2 / C^2$ (propriété de Hilbert-Schmidt);
- il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{m < M} |a_m^n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Tu_n\| &= \left\| \sum_m a_m^n T e_m \right\| \\ &\leq \left| \sum_{m < M} |a_m^n| \|T e_m\| \right| + \left| \sum_{m \geq M} |a_m^n| \|T e_m\| \right| \\ &\leq \left(\sum_{m < M} |a_m^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m < M} \|T e_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{m \geq M} |a_m^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \geq M} \|T e_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}} \|T\|_{HS} + C \frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $Tu_n \rightarrow 0$ dans H fortement. Cela prouve que T est compact.

Réciproquement il existe des opérateurs T compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple, la multiplication M_a de l'exercice 1, avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($n \geq 1$).

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons encore δ^n la suite dont seul le n -ième terme n'est pas nul, et vaut 1. Alors (δ^n) est base hilbertienne de H . Calculons

$$\sum_{n \geq 0} \|\Gamma_c(\delta^n)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} |c_{k+n}|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} (1+j) |c_j|^2,$$

en sommant le long des diagonales $k + n = j$ cette série à termes positifs. On voit donc que $\|\Gamma_c\|_{HS} < +\infty$ si et seulement si $\sum_{j \in \mathbb{N}} (1 + j) |c_j|^2 < +\infty$.

★

Solution 4. *Opérateurs à noyaux*

1. Soit (e_n) une base hilbertienne de H . Notons $e_n \otimes e_m : (x, y) \mapsto e_n(x)e_m(y)$.

$$\begin{aligned} \|T_K\|_{HS}^2 &= \sum_n \|T_K e_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} |(T_K e_n | e_m)|^2 \\ &= \sum_{n,m} \left| \iint_{\Omega} K(x, y) e_n(x) e_m(y) dx dy \right|^2 = \sum_{n,m} |(K | e_n \otimes e_m)|^2. \end{aligned}$$

La seule chose est donc de vérifier que $(e_n \otimes e_m)$ est une base hilbertienne de $L^2(\Omega \times \Omega)$. C'est bien une famille orthonormée. Soit V est l'espace vectoriel qu'elle engendre. Alors, si $h \in V^\perp$, on a $\forall n, m \in \mathbb{N}$,

$$\iint_{\Omega} h(x, y) e_n(x) e_m(y) dx dy = 0,$$

et donc pour tout n , la fonction $y \mapsto h(x, y) e_n(x)$, qui pour presque tout $x \in \Omega$ est dans $L^2(\Omega)$, est nulle. Donc à y fixé, $\int_{\Omega} h(x, y) e_n(x) dx = 0$, et donc $h(x, y) \equiv 0$. Cela prouve que $\bar{V} = (V^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = L^2(\Omega \times \Omega)$.

2. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H = L^2(\Omega)$. Notons $T e_n = \sum_m a_m^n e_m$ et

$$K(x, y) = \sum_{m,n} a_m^n e_m(x) e_n(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ car T est Hilbert-Schmidt (on a précisément $\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} |a_m^n|^2 = \|T\|_{HS}^2 < +\infty$). Par construction, T_K vérifie que pour tout $p, q \geq 0$, $(T_K e_p | e_q) = a_q^p$ et donc $T_K e_p = T e_p$. Ainsi, T_K est continu sur $L^2(\Omega)$, et coïncide avec T sur $\text{Vect}(e_n)$, qui est dense. Donc T_K est égal à T .

Examinons l'unicité : supposons que $T = T_{K_1} = T_{K_2}$. Alors $0 = \|T_{K_1 - K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$, et donc $K_1 = K_2$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert ω de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tel que $\bar{\omega}$ est borné, contenu dans $\Omega \times \Omega$, et tel que $\int_{(\Omega \times \Omega) \setminus \omega} |K|^2 \leq \varepsilon$. Soit F une fonction continue sur $\Omega \times \Omega$, à support dans $\bar{\omega}$, telle que $\|K - F\|_{L^2(\bar{\omega})} \leq \varepsilon$. Il existe un polynôme P en les variables x, y tel que

$$\|F - P\|_{L^\infty(\bar{\omega})} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\omega|}}.$$

Notons $\tilde{P} := \mathbb{1}_{\bar{\omega}} P$. Alors $T_{\tilde{P}}$ est de rang fini (car si d est le degré en x de P , alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $T_{\tilde{P}}(f)$ est une combinaison linéaire de troncatures des monomes $1, x, \dots, x^d$). Enfin, $\|T_K - T_{\tilde{P}}\| \leq \|T_K - T_{\tilde{P}}\|_{HS} = \|K - \tilde{P}\|_{L^2} \leq 3\varepsilon$. Donc T_K est bien approchable par une suite d'opérateurs de rang fini.

★

Solution 5. *Théorème de Krein-Rutman*

1. $Tu \in \overset{\circ}{C}$, donc il existe ρ tel que $B(Tu, \rho) \subset C$ donc $r = \frac{\rho}{\|u\|}$ convient.

2. On suppose $T(x + u) = \lambda x$ pour un certain x dans C . Comme $x + u \in C \setminus \{0\}$, on sait que $\lambda > 0$.

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\frac{\lambda}{r})^n x - u \in C$. Tout d'abord, $\lambda x - T(u) = T(x) \in C$, donc $\lambda x - T(u) + T(u) - ru \in C$ donc $\frac{\lambda}{r}x - u \in C$. Supposons maintenant que $\frac{\lambda^n}{r^n}x - u \in C$. Alors $\frac{\lambda^n}{r^n}T(x) - T(u) \in C$ donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) \in C$, donc $\frac{\lambda^n}{r^n}(\lambda x - T(u)) - T(u) + (T(u) - ru) + \frac{\lambda^n}{r^n}T(u) \in C$, donc $\frac{\lambda^{n+1}}{r^{n+1}}x - u \in C$. Or si $\lambda < r$, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $-u \in C$, donc $u = 0$, ce qui est contredit l'hypothèse selon laquelle u est intérieur au cône.

3. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in C$ tel que

$$\|x_n + u\| \leq \frac{1}{n}.$$

Alors $x_n \rightarrow -u$, mais comme C est fermé, $-u \in C$, ce qui est absurde. On considère donc l'application $\Phi : C \rightarrow C$, $x \mapsto T(\frac{x+u}{\|x+u\|})$. L'application $x \mapsto x/\|x\|$ est continue sur $E \setminus B(0, \alpha)$, donc Φ est continue sur C , en tant que composée d'applications continues. Par ailleurs $\Phi(C) \subset T(B_1)$ est relativement compact. On peut donc appliquer le théorème de Schauder à Φ , ce qui nous donne l'existence d'un point fixe $x \in C$. Ainsi,

$$T(x + u) = \|x + u\|x.$$

Notons que d'après la question précédente, $\|x + u\| \geq r$.

4. On obtient de la même manière, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $x_\varepsilon \in C$ tel que

$$T(x_\varepsilon + \varepsilon u) = \|x_\varepsilon + \varepsilon u\|x_\varepsilon. \quad (\star)$$

On pose $\lambda_\varepsilon = \|x_\varepsilon + \varepsilon u\|$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda_\varepsilon \geq r$, avec r indépendant de ε (en effet, ce r , donné par la question 1, peut être choisi identique, car on a toujours $T(\varepsilon u) - r(\varepsilon u) = \varepsilon(T(u) - ru) \in C$). Par ailleurs,

$$\|x_\varepsilon + \varepsilon u\|\|x_\varepsilon\| \leq \|T\|\|x_\varepsilon + \varepsilon u\|,$$

donc $\|x_\varepsilon\| \leq T$, et $\lambda_\varepsilon \leq \|T\| + \varepsilon\|u\|$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que

$$\lambda_\varepsilon \rightarrow \mu_0 > 0,$$

et par compacité de T ,

$$T(x_\varepsilon) \rightarrow x_0 \in C,$$

puisque C est fermé. D'après (\star) , on obtient donc

$$x_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{\mu_0}x_0,$$

et par conséquent, $T(x_0) = \mu_0 x_0$. Bien sûr, $x_0 \neq 0$, sans quoi on aurait $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$.

5. Comme $-x \notin C$, on peut poser $b := \sup\{\beta \in [0, 1] \mid (1 - \beta)x_0 - \beta x \in C\}$. Comme C est convexe et fermé, on voit que $(1 - \beta)x_0 - \beta x \in C$ pour $0 \leq \beta \leq b$, et $(1 - \beta)x_0 - \beta x \notin C$ pour $b < \beta \leq 1$. On a

$$T((1 - \beta)x_0 - \beta x) = (1 - \beta)\mu_0 x_0 - \beta \mu x$$

Supposons que x_0 et x ne soient pas alignés. Alors, on a $(1 - b)x_0 - bx \in C \setminus \{0\}$, donc $(1 - b)\mu_0 x_0 - b\mu x \in \overset{\circ}{C}$, et donc $\mu < \mu_0$ (sinon $((1 - b)\mu_0 x_0 - b\mu x) + b(\mu - \mu_0) \in \overset{\circ}{C}$, ce

qui n'est pas le cas). En inversant les rôles de x et x_0 , on obtient l'inégalité inverse, et une absurdité. Donc x_0 et x sont alignés (et alors nécessairement $\mu = \mu_0$).

6. On peut supposer $x \notin C$ et $-x \notin C$ (sinon il suffit d'appliquer la question précédente). En particulier, x et x_0 ne sont pas alignés. Il existe b tel que $(1 - \beta)x_0 + \beta x \in C$ pour $0 \leq \beta \leq b$, et $(1 - \beta)x_0 + \beta x \notin C$ pour $b < \beta \leq 1$. On a donc

$$T((1 - b)x_0 + bx) = (1 - b)\mu_0 x_0 + b\mu x,$$

et donc, comme précédemment, $\mu < \mu_0$.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Notons C l'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont positives (≥ 0). C est un cône convexe de sommet 0 , fermé, $C \cap (-C) = \{0\}$, et l'intérieur de C est formé des vecteurs dont toutes les composantes sont *strictement* positives. De plus, M est un opérateur compact, tel que $M(C \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{C}$. Donc on peut appliquer le théorème de Krein-Rutman pour obtenir l'existence d'une valeur propre simple de M , notée μ_0 , qui majore toutes les autres valeurs propres (qui, en outre, sont positives). Bien sûr, le vecteur propre associé à μ_0 est à coefficients strictement positifs.

★