Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 6

Distributions : singularités et régularisation

Séance du 19 mars 2018

Solution 1. *Échauffement*

Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle \delta_0', \phi \rangle = -\phi'(0)$. Supposons que δ_0' soit une mesure, et notons $K = [-1, 1]$. Il existerait alors une constante $C > 0$ telle que pour tout ϕ à support dans K, $|\langle \delta_0', \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{\mathcal{C}_K^0}$.

Soit donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive, à support dans K, et telle que $\psi'(0) = 1$. Notons $\phi_n(x) := \psi(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit que ϕ_n reste à support dans K pour tout $n \geq 1$, que $\|\phi_n\|_{\mathcal{C}_K^0} = \|\psi\|_{\mathcal{C}_K^0}$, et enfin que

$$\langle \delta_0', \phi_n \rangle = -\phi_n'(0) = -n\psi'(0) = -n,$$

ce qui contredit l'inégalité ci-dessus lorsque $n \to +\infty$.

$\star$

Solution 2. *Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$. On note $I =]a_0, a_{N+1}[$ (avec éventuellement $a_0 = -\infty$ et $a_{N+1} = +\infty$), et on calcule

$$\begin{aligned}
\langle T_f', \phi \rangle &= -\int_I f\phi' \\
&= -\sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\phi' \\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'\phi - \sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1} - 0) - (f\phi)(a_i + 0)] \\
&= \langle T_{f'_{\text{reg}}}, \phi \rangle - \sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1} - 0) - (f\phi)(a_i + 0)],
\end{aligned}$$

où l'intégration par partie s'est faite sur des intervalles du type $[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon]$, avant de faire tendre ε vers 0.

En utilisant le fait que ϕ est à support compact, on peut réorganiser la somme :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1} - 0) - (f\phi)(a_i + 0)] \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N} [(f\phi)(a_i - 0) - (f\phi)(a_i + 0)] \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N} (f(a_i + 0) - f(a_i - 0))\phi(a_i) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N} (f(a_i + 0) - f(a_i - 0))\langle \delta_{a_i}, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve.

$\star$

Solution 3. *Fonctions lipschitziennes*

Supposons que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est lipschitzienne. Pour tout $1 \leq j \leq d$ et $h \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\tau_h^j f : x \mapsto f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Si $x \in \mathbb{R}^d$, on a donc $|\tau_h^j f(x) - f(x)| \leq Ch$ (quitte à changer la norme sur $\mathbb{R}^d$). Pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $h > 0$, on a d'une part

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\tau_h^j f(x) - f(x)}{h} \right) \phi(x) dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x)| dx = C \|\phi\|_{L^1},$$

et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\tau_h^j f(x) - f(x)}{h} \right) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\frac{\tau_{-h}^j \phi(x) - \phi(x)}{h} \right) dx \xrightarrow[h \to 0^+]{} - \int_{\mathbb{R}^d} f \partial_{x_j} \phi,$$

grâce au théorème de convergence dominée. Cela signifie que

$$|\langle \partial_{x_j} f, \phi \rangle| \leq C \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

et donc $\partial_{x_j} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Grâce au théorème de dualité, on voit que $\partial_{x_j} f$ s'identifie alors à une fonction L^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

Réciproquement, si f est bornée sur $\mathbb{R}^d$ et que toutes ses dérivées partielles, au sens des distributions, s'identifient à des fonctions bornées, montrons que f est lipschitzienne. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, positive, à support dans $B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$, et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \psi = 1$. Pour $n \geq 1$, la suite des fonctions $\phi_n : x \mapsto n^{-d} \psi(nx)$ constitue donc une approximation de l'unité. Posons $f_n := f * \phi_n$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, pour tout $1 \leq j \leq d$, on a $\partial_{x_j} f_n = (\partial_{x_j} f) * \phi_n$, donc en notant

$$C := \max_{1 \leq j \leq d} \|\partial_{x_j} f\|_{L^\infty},$$

on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \partial_{x_j} f_n(x) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(y) \phi_n(x-y) dy \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x-y) dy = C.$$

D'où $\|\partial_{x_j} f_n\|_{L^\infty} \leq C$, uniformément en $n \geq 1$. De même, $\|f_n\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$. Le théorème des accroissements finis classique, pour les fonctions lisses, assure donc que $\forall n \geq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C \|x - y\|. \tag{$\star$}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ dans le membre de gauche, on trouve que f est lipschitzienne.

Remarque : Pour voir ce dernier fait, la meilleure idée est d'appliquer le théorème d'Ascoli à la famille $\{f_n\}$, en se plaçant sur les compacts $\bar{B}(0,N)$, $N \in \mathbb{N}$. Alors la famille est équicontinue (grâce à la borne uniforme en n dans l'inégalité ($\star$)), et elle prend ses valeurs, en chaque point $x \in \bar{B}(0,N)$, dans le compact $[-\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^\infty}]$. Donc on peut extraire de $\{f_n\}$ une sous-suite qui converge uniformément sur $\bar{B}(0,N)$. Il suffit de faire une extraction diagonale pour trouver une sous-suite $\{n_k\}$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_{n_k} \to g$$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$. Cela implique en particulier que $f_{n_k} \to g$ dans $\mathcal{D}'$, donc que $g = f$, puisqu'on sait que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f_{n_k}(x) \to f(x)$, et on peut passer à la limite dans $(\star)$.

$\star$

Solution 4. *Pseudo monômes*

1. La fonction $x \mapsto (x_+)^\alpha$ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha > -1$.

2. Écrivons $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$, $\psi \in C^\infty$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq C\|\phi'\|_{L^\infty}$. On découpe l'intégrale en 1 :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \phi = -\frac{\phi(0)}{1+\alpha}(\varepsilon^{1+\alpha} - 1) + \int_\varepsilon^1 x^{1+\alpha}\psi + \int_1^\infty x^\alpha \phi.$$

Les deux derniers termes admettent une limite quand $\varepsilon \to 0$ (car $1 + \alpha > -1$). Posons donc $A = -\phi(0)/(1+\alpha)$. On obtient donc la formule demandée, avec

$$\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\phi) = \frac{\phi(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 x^\alpha(\phi(x) - \phi(0)) + \int_1^\infty x^\alpha \phi.$$

L'ordre de cette ditribution est non nul car sinon, $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ apparaîtrait comme une mesure. Mais $f(x) = x_+^{-1-\alpha}\chi$ (où χ est une fonction plateau au voisinage de 0) est continue, avec $f(0) = 0$, mais $\int_\varepsilon^1 x^\alpha f$ n'admet pas de limite quand $\varepsilon \to 0$. Par contre, on voit que

$$|\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\phi)| \leq C_1\|\phi\|_{L^\infty} + C_2\|\psi\|_{L^\infty} + C_3\|\phi\|_{L^\infty} \leq C(\|\phi\|_{L^\infty} + \|\phi'\|_{L^\infty}),$$

donc $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est d'ordre inférieur ou égal à 1.

3. Il faut cette fois développer à l'ordre m :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}x^k + x^m\psi(x),$$

avec $\psi \in C^\infty$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq C\|\phi^{(m)}\|_{L^\infty}$.

On trouve que

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \phi = \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+m}\psi(x)dx + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(k+1+\alpha)}(\varepsilon^{k+1+\alpha} - 1) + \int_1^\infty x^\alpha \phi.$$

Et donc, comme $\alpha + m > -1$,

$$\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\phi) = \int_1^\infty x^\alpha \phi + \int_0^1 x^\alpha \left(\phi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right) dx + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(k+1+\alpha)}.$$

4. Il faut calculer $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\phi')$. On fait une intégration par partie dans l'expression précédente, et on trouve que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)' = \alpha\mathrm{pf}(x_+^{\alpha-1})$. Ainsi, par récurrence, l'ordre de $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est la partie entière de α.

5. Lorsque $\alpha \to \alpha_0$, $\lfloor \alpha \rfloor = \lfloor \alpha_0 \rfloor = m$ (au moins pour α assez proche de α_0). Ainsi, les deux expressions $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\phi)$ et $\mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0})(\phi)$ sont constituées des mêmes termes, où l'on a remplacé α par α_0. Ensuite, on a convergence terme à terme (par exemple, grâce au théorème de convergence dominée), d'où $\mathrm{pf}(x_+^\alpha) \to \mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0})$ au sens des distributions.

6. On calcule comme précédemment :

$$\int_\varepsilon^1 x^{-m}\left(\phi(x)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)dx$$
$$=\int_\varepsilon^1 x^{-m}\phi(x)+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(k+1-m)}(\varepsilon^{k+1-m}-1)+\frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\ln\varepsilon.$$

(puisque $\ln(1)=0$). Et on a donc (tous les termes sont bien définis) :

$$\mathrm{pf}(x_+^{-m})(\phi)=\int_1^\infty x^{-m}\phi(x)dx+\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!(k+1-m)}$$
$$+\int_0^1 x^{-m}\left(\phi(x)-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right).$$

Cette expression assure donc qu'il s'agit d'une ditribution, d'ordre au plus m. En fait, on calcule la dérivée comme avant :

$$\mathrm{pf}(x_+^{-m})'=-m\mathrm{pf}(x_+^{-(m+1)})'+\frac{(-1)^m\delta_0^{(m)}}{m!}.$$

Et par récurrence, on obtient que l'ordre est m.

Pour la convergence : si $\alpha\to m$ par valeurs inférieures, la partie entière de $-\alpha$ est m. Si $\alpha\to m$ par valeurs supérieures, la partie entière de $-\alpha$ est $m-1$, mais elle est aussi valable avec m. En comparant les termes, on voit que tous convergent, sauf le dernier $\frac{\phi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!(m+\alpha)}$, qui diverge dès que $\phi^{(m-1)}(0)\neq 0$. Ainsi les $\mathrm{pf}(x_+^{-m})$ ne sont pas limites de $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$.

⋆

Solution 5. *Propriété de la moyenne*

1. Grâce à un développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on sait que, pour tous $x,h\in\mathbb{R}^d$, il existe $\tau_h\in]0,1[$ tel que $f(x+h)=f(x)+df(x)\cdot h+\frac{1}{2}d^2f(x+\tau_h h)(h,h)$. Maintenant, comme $h\mapsto f(x)$ et $h\mapsto df(x)\cdot h$ vérifient la propriété de la moyenne, on a, pour tout $r>0$ assez petit,

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int_{\partial B(0,r)}d^2f(x+\tau_\sigma\sigma)(\sigma,\sigma)d\sigma=0.$$

En faisant un changement de variables pour ramener la sphère de rayon r à la sphère unité, on trouve, grâce à la bilinéarité de d^2f, que

$$\int_{\partial B(0,1)}d^2f(x+\tau_{r\sigma}r\sigma)(\sigma,\sigma)d\sigma=0,$$

pour tout $r>0$ assez petit. Mais $d^2f(x+\tau_{r\sigma}r\sigma)\to d^2f(x)$ uniformément sur $\partial B(0,1)$ quand $r\to 0$ (par continuité de d^2f), donc on a

$$\int_{\partial B(0,1)}d^2f(x)(\sigma,\sigma)d\sigma=0.$$

Or il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle la matrice de $d^2f(x)$ est diagonale. Notons $d^2f(x)=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$. Dans cette base, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$0=\int_{\|h\|^2=1}\sum_{j=1}^n a_jh_j^2dh_1\ldots dh_d=\sum_{j=1}^n a_j\cdot\int_{\|h\|^2=1}h_1^2dh_1\ldots dh_d=C\cdot\mathrm{tr}(d^2f(x)),$$

où $C > 0$. Finalement, on trouve que $\mathrm{tr}(d^2 f(x)) = \Delta f = 0$.

2. Soit ϕ_n une approximation de l'identité à support dans $B(0, 1/n)$ (cf. les exercices précédents). Soit $x \in \Omega$, $r > 0$ tels que $B(x,r) \subset \Omega$, et soit N assez grand pour que $B(x, r+2/N) \subset \Omega$. Alors on peut définir la convolée $f_n = \phi_n * f$ aux points $y \in B(x, r+1/N)$ pour $n \geq N$. En reprenant les résultats sur les approximations de l'identité, on voit que $f_n \to f$ uniformément sur $B(x, r+1/N)$ (au sens des fonctions continues). D'autre part, $f_n \in \mathcal{C}^\infty(B(x,r))$ et vérifie, grâce au théorème de Fubini, pour tout $\rho \leq r$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\partial B(x,\rho)|} \int_{\partial B(x,\rho)} f_n(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{|\partial B(x,\rho)|} \int_{\partial B(x,\rho)} \int_{B(0,\frac{1}{n})} \phi_n(y) f(\sigma - y) dy d\sigma \\
&= \int_{B(0,\frac{1}{n})} \frac{\phi_n(y)}{|\partial B(x,\rho)|} \int_{\partial B(x-y,\rho)} f(\sigma) d\sigma dy \\
&= \int_{B(0,\frac{1}{n})} \phi_n(y) f(x-y) dy \\
&= f_n(x).
\end{aligned}$$

(la troisième égalité vient de la propriété de la moyenne sur f). On peut reprendre ce calcul pour tout $y \in B(x,r)$ avec les rayons convenables. Ainsi, f_n vérifie la propriété de la moyenne dans l'ouvert $B(x,r)$, et comme elle est régulière, on a $-\Delta f_n = 0$.

Vu la convergence $f_n \to f$ et la continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'$, on en déduit l'égalité au sens de $\mathcal{D}'(B(x,r))$ (c'est-à-dire, quand on teste contre des fonctions de $\mathcal{D}(B(x,r))$: $-\Delta f = 0$. Ceci étant vrai pour tout $B(x,r) \subset \Omega$, en utilisant un théorème de partition de l'unité, on a l'égalité $-\Delta f = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Étant donneé $f \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\Delta f = 0$, en utilisant le fait que $\nabla |x|^2 = 2x$ et $\Delta |x|^2 = 2n$, on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} f(x) dx &= \frac{1}{2n} \int_{B(0,r)} f(x) \Delta(|x|^2 - r^2) dx \\
&= \frac{1}{n} \int_{\partial B(0,r)} f r d\sigma - \frac{1}{n} \int_{B(0,r)} \nabla f \cdot x dx \\
&= \frac{r}{n} \int_{\partial B(0,r)} f d\sigma - \frac{1}{2n} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial f}{\partial r} (|x|^2 - r^2) + \frac{1}{2n} \int_{B(0,r)} (|x|^2 - r^2) \Delta f.
\end{aligned}$$

Le terme du milieu vaut 0, car on est sur le bord ; le dernier également, car $\Delta f = 0$. On note $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} f(x) dx$. Comme $|B(0,r)| = r^n |B(0,1)|$, on a $F'(r) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{\partial B(0,r)} f d\sigma - \frac{n}{r|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} f(x) dx$, et donc le calcul précent prouve que

$$rF'(r) = nF(r) - nF(r) = 0.$$

F est C^1, et $F(0) = f(0)$, d'où l'on déduit que $F(r) = f(0)$. Ce calcul peut être réitéré en tout point d'un ouvert sur lequel $\Delta f = 0$, donc f vérifie la propriété de la moyenne sur cet ouvert.

4. Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'$ tel que $\Delta T = 0$ au sens des distributions. On a alors $\phi_n * T \in C^\infty$ et $\Delta(\phi_n * T) = \phi_n * \Delta T = 0$. Le calcul précédent nous dit donc que $\phi_n * T$ satisfait la propriété de la moyenne, et par ailleurs, $\phi_n * T \longrightarrow T$ au sens des distributions. Notons $f_n = \phi_n * T$. En considérant des fonctions $\phi_{x,r}$ comme dans l'indication, et en

calculant en coordonnées sphériques,

$$\begin{aligned}\langle f_n, \phi_{x,r}\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f_n \phi_{x,r} &= \int_{\rho=0}^{r} \int_{\omega\in\mathbb{S}^{d-1}} \psi\left(\frac{\rho}{r}\right) f_n(x+\rho\omega)\rho^{n-1} d\rho d\omega \\ &= c_d \int_{\rho=0}^{r} \psi\left(\frac{\rho}{r}\right) f_n(x)\rho^{2n-2} d\rho \\ &= C(\psi, r)\cdot f_n(x).\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \longrightarrow \infty$, on obtient donc $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{C(\psi,r)}\langle T, \phi_{x,r}\rangle$. La convergence est uniforme sur les compacts, car la constante qui sort dans le calcul précédent ne dépend pas de x, et parce que $\langle f_n, \phi_{x,r}\rangle = \langle T, \phi_n * \phi_{x,r}\rangle$, et $\phi_n * \phi_{x,r} \to \phi_{x,r}$ uniformément en x sur les compacts, dans toutes les normes $\mathcal{C}^k$.

⋆