Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 6

Distributions

Séance du 11 mars 2019

Solution 1. *Échauffement : quelques exemples de distributions*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et supposons que $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [-N, N] =: K$, avec $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq N\|\varphi\|_{\mathcal{C}_K^N(\mathbb{R})}.$$

La formule pour u définit donc bien une distribution, d'ordre au plus N sur le compact $[-N, N]$.

Supposons que u est d'ordre fini, disons N_0. Posons $K := [-N_0 - 2, N_0 + 2]$. Il existe donc une constante A_K telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans K,

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq A_K\|\varphi\|_{\mathcal{C}_K^{N_0}}.$$

Montrons que cela ne peut pas arriver : soit χ une fonction lisse telle que $\chi^{(N_0+1)}(0) = 1$, et $\mathrm{supp}\,\chi \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $\varphi_m(x) = \chi(m \cdot (x - (N_0 + 1)))$. De la sorte, pour tout $m \geq 1$, $\varphi_m^{(k)}(k) = 0$ si $0 \leq k \leq N_0$, et $\varphi_m^{(N_0+1)}(N_0 + 1) = m^{N_0+1}$. Donc $|\langle u, \varphi_m\rangle| = m^{N_0+1}$. Or

$$\|\varphi_m\|_{\mathcal{C}_K^{N_0}} \leq Cm^{N_0},$$

où $C > 0$ ne dépend pas de m. Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $m^{N_0+1} \leq Cm^{N_0}$, ce qui est absurde.

2. La fonction $x \mapsto e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de $\mathbb{R}_+^*$, $e^{1/x^2} \in \mathcal{C}^0(K)$ (en particulier, cette fonction est localement intégrable). Par contre, considérons φ une fonction lisse à support dans $]1, 2[$, positive, d'intégrale 1, et la suite $\varphi_k(x) = \varphi(kx)$. Alors tous les φ_k sont à support dans le même compact $K = [0, 2]$, et pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^m\varphi_k\|_{\mathcal{C}_K^0} = k^m\|\partial_x^m\varphi\|_{\mathcal{C}_K^0}$$

Mais

$$\langle f, \varphi_k\rangle = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{1/x^2}\varphi_k(x)dx \geq e^{k^2/4}\frac{1}{k}$$

donc

$$\frac{\langle f, \varphi_k\rangle}{\|\partial_x^m\varphi_k\|_{\mathcal{C}_K^0}} \to +\infty \quad \text{quand } k \to \infty.$$

⋆

Solution 2. *Dérivation et intégration des distributions*

1. La fonction $f : x \mapsto |\sin(x)|$ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on peut donc la considérer comme un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. On a

$$\begin{aligned}
\langle f'', \varphi\rangle &= \langle f, \varphi''\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\sin(x)|\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx - \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi''(x)dx \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \cos(x)\varphi'(x)dx \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin(x)\varphi(x)dx \right) \\
&\quad + \varphi(2k\pi) + 2\varphi((2k+1)\pi) + \varphi((2k+2)\pi).
\end{aligned}$$

D'où $f'' = -|\sin(x)| + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\pi}$.

2. On cherche v tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle v, \varphi'\rangle = -\langle u, \varphi\rangle$. Il faut remarquer que les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle sont exactement les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En effet, les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont clairement d'intégrale nulle. Réciproquement, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est d'intégrale nulle, on pose $\varphi(x) := \int_{-\infty}^x \psi(t)dt$, et alors $\psi = \varphi'$. Si $v' = u$, on a alors $\langle v, \psi\rangle = -\langle u, \varphi\rangle$.

Maintenant, soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, d'intégrale 1. On choisit comme on veut $\langle v, \chi\rangle$: ensuite, si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi - (\int_{\mathbb{R}} \psi)\chi$ est d'intégrale nulle, donc c'est la dérivée d'une certaine fonction φ, et on a alors nécessairement

$$\langle v, \psi\rangle = -\langle u, \varphi\rangle + \langle v, \chi\rangle \int_{\mathbb{R}} \psi.$$

Cela définit bien une distribution car les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 1 de φ sont des dérivées d'ordre supérieur ou égal à zéro de ψ, et si ψ est à support dans $[-M, M]$, $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \leq 2M\|\psi\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}$.

On obtient ainsi un espace de dimension 1 de primitives de u.

Réciproquement, si v est une primitive de u, v est déterminé sur l'hyperplan des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle par la relation $\langle v, \varphi'\rangle = \langle u, \varphi\rangle$, et sa valeur en χ la définit complétement, donc l'espace des primitives est de dimension 1.

⋆

Solution 3. *Distribution dont le support est un point*

1. Notons $K = \overline{B(0,2)}$. Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans K, on ait

$$|\langle u, \tilde{\varphi}\rangle| \leq C\|\tilde{\varphi}\|_{\mathcal{C}^m_K(\mathbb{R}^n)}.$$

À présent, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est quelconque, écrivons $\varphi = \psi\varphi + (1-\psi)\varphi$. Comme $\operatorname{supp} u = \{0\}$, $\langle u, (1-\psi)\varphi\rangle = 0$. Ainsi, $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\|\psi\varphi\|_{\mathcal{C}^m_K(\mathbb{R}^n)} \leq C'(\psi, m)\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m_K(\mathbb{R}^n)}$. Donc u est d'ordre fini.

2. Par construction, $\operatorname{supp}(1-\psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r)}$. Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\operatorname{supp}(1-\psi_r)\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r)}$, et donc par définition,

$$\langle u, (1-\psi_r)\varphi\rangle = 0 = \langle u, \varphi\rangle - \langle \psi_r u, \varphi\rangle,$$

d'où le résultat.

3. Grâce à la formule de Taylor

$$\partial^\alpha\varphi(x) - \partial^\alpha\varphi(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-|\alpha|}}{(m-|\alpha|)!} D^{m-|\alpha|+1}(\partial^\alpha\varphi)(tx).(x)^{m-|\alpha|+1}dt,$$

on sait que pour une constante C ne dépendant que des dérivées de φ d'ordre β, $|\beta| = m+1$,

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| \leq m,\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\partial^\alpha\varphi(x)| \leq C|x|^{m+1-|\alpha|}.$$

Soit $0 < r < 1$, de sorte que $\mathrm{supp}(\psi_r\varphi) \subseteq K$. On calcule par la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\psi_r\varphi)(x) = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\partial^{\alpha-\beta}\psi\left(\frac{x}{r}\right) r^{|\beta|-|\alpha|}\partial^\beta\varphi(x).$$

On sait que $\mathrm{supp}(\psi_r\varphi) \subseteq B(0,2r)$. Or pour tout $x \in B(0,2r)$ et $|\alpha| \leq m$,

$$|\partial^\alpha(\psi_r\varphi)(x)| \leq C\sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^n)} r^{|\beta|-|\alpha|}|x|^{m+1-|\beta|} \leq C'r\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)},$$

puisque $r < 1$. En sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m, on obtient

$$\|\psi_r\varphi\|_{\mathcal{C}_K^m(\mathbb{R}^n)} \leq C'r\|\psi\|_{\mathcal{C}_K^m(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme u est d'ordre m, il existe C_K tel que pour toute fonction φ à support dans K, $|\langle u,\varphi\rangle| \leq C_K\|\varphi\|_{\mathcal{C}_K^m(\mathbb{R}^n)}$. Maintenant,

$$|\langle u,\varphi\rangle| = |\langle u,\psi_r\varphi\rangle| \leq C_K\|\psi_r\varphi\|_{\mathcal{C}_K^m(\mathbb{R}^n)} \to 0$$

quand $r \to 0$. Donc $\langle u,\varphi\rangle = 0$.

4. On a montré que $\bigcap_{k=0}^m \ker\delta_0^{(k)} \subset \ker u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u \in \mathrm{Vect}\{\delta_0^{(k)} \mid k \in [\![0,m]\!]\}$, ce qui est le résultat recherché.

$\star$

Solution 4. *Valeur principale de* $\frac{1}{x}$

1. On a

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(0)}{x}dx + \int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx.$$

Un calcul similaire pour $\int_{-1}^{-\varepsilon}$ montre que le terme en $\int_\varepsilon^1 \frac{\varphi(0)}{x}dx$ disparaît. La limite existe et vaut donc

$$\int_{|x|\geq1} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{|x|\leq1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,$$

qui est bien définie puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}$ se prolonge par $\varphi'(0)$ en 0.

Cette distribution n'est pas d'ordre 0, sinon elle apparaîtrait comme une mesure. Plus précisément, soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact K, positive, paire, et égale à 1 sur $[-1,1]$. On définit la suite $\varphi_n : x \mapsto \arctan(nx)\chi(x)$. C'est une suite de fonctions continues à support dans K telles que $\varphi_n(0) = 0$ et $\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^0(K)} \leq C$, mais les $\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}),\varphi_n\rangle$ divergent :

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}),\varphi_n\rangle = 2\int_0^\infty \frac{\arctan(nx)}{x}\chi(x)dx = 2\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x}\chi(x/n)dx \to +\infty$$

(par exemple en appliquant le lemme de Fatou).

Par contre, l'expression de ψ assure que c'est une distribution d'ordre au plus 1.

2. La fonction $x \mapsto \log|x|$ est bien localement intégrable. Calculons, pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\langle \log|x|, \varphi' \rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\varphi'(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\log(\varepsilon)(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \right) \\
&= -\langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

car comme φ est dérivable en 0, on a $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \varphi \right\rangle &= \left\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\varphi \right\rangle \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \\
&= \langle \mathbb{1}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Cela prouve que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$.

4. Si u est comme dans l'énoncé, on a $xu - x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 0$. Cela implique que $\mathrm{supp}\left(u - \mathrm{vp}(\frac{1}{x})\right) \subseteq \{0\}$: si φ est à support compact ne rencontrant pas $\{0\}$, $\langle u - \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle xu - x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \frac{\varphi}{x} \rangle = 0$. On en déduit (voir l'exercice précédent) qu'il existe $c_0, \dots, c_n$ tels que

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = \sum_{j=0}^{n} c_j \delta_0^{(j)}.$$

On a donc également $\sum_{j=0}^{n} c_j x \delta_0^{(j)} = 0$. Or $x\delta_0 = 0$ et pour $j \geq 1$:

$$\langle x\delta_0^{(j)}, \varphi \rangle = \langle \delta_0^{(j)}, x\varphi \rangle = (-1)^j (x\varphi)^{(j)}(0) = j(-1)^j \varphi^{(j-1)}(0) = -j\langle \delta_0^{(j-1)}, \varphi \rangle,$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(-j)\delta_0^{(j-1)} = 0.$$

Comme la famille $(\delta_0, \delta_0', \dots, \delta_0^{(n)})$ est libre, cela entraîne que $c_j = 0$ pour $j \geq 1$. Ainsi

$$u - \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}) = c_0\delta_0.$$

5. Remarquons que pour $\alpha > 0$, on a

$$\langle x|x|^{\alpha-2}, \varphi \rangle = \int_{|x| \geq 1} |x|^\alpha \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-1}^{1} |x|^\alpha \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0) \underbrace{\int_{-1}^{1} x|x|^{\alpha-2} dx}_{=0}.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à chacun des deux termes restants, on voit que $\langle x|x|^{\alpha-2}, \varphi \rangle \to \langle \mathrm{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$ quand $\alpha \to 0$ (avec $\alpha > 0$), ce que l'on voulait démontrer.

⋆

Solution 5. *Support et ordre*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. On pose $\psi(x) = \int_0^1 (1-t)\varphi''(tx)dt$. Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et ψ est telle que $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \psi(x)x^2$. Avec ces notations, le terme d'ordre n de la somme vaut

$$n\varphi(0) + \varphi'(0)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\psi(1/j)}{j^2} - n\varphi(0) - \varphi'(0)\log n.$$

Or il est bien connu que que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \to \gamma$, et la série qui reste est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: de la sorte, $\langle u, \varphi\rangle$ est bien défini. Ensuite, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])} \leq C\|\varphi''\|_{L^\infty}$, on en déduit que $|u(\varphi)| \leq C(\|\varphi'\|_{L^\infty} + \|\varphi''\|_{L^\infty})$, et u est donc d'ordre au plus 2.

2. Soit $K = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^\infty \{1/j\}$. Bien sûr, $S \subseteq K$ car si $x \notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V annule u, d'après la formule de l'énoncé. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j-\varepsilon, 1/j+\varepsilon[$, on voit que $1/j \in S$. Or S est un support, donc est fermé et ainsi, automatiquement, $0 \in S$. Finalement, $S = K$.

3. Un calcul direct montre que $\langle u, \varphi_k\rangle = k$, mais comme $\varphi_k^{(i)}(1/j) = 0$ si $i \geq 1$ et $j \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{p}\sup_{x\in S}|\varphi_k^{(i)}(x)| = \sup_{x\in S}|\varphi_k(x)| = 1.$$

On ne peut donc pas avoir $k \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela prouve que la connaissance du support d'une distribution ne permet pas de se retreindre à l'étude des fonctions sur celui-ci.

4. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[), \quad |\langle u, \varphi\rangle| \leq C(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc comme suggéré le « cut-off » de la primitive seconde d'une fonction test : soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,2[)$, $0 \leq \psi \leq 1$ et $\psi|_{[0,1]} = 1$. On pose

$$\psi_k(x) = \psi(x)\int_0^x\int_0^y \varphi(kt)dtdy.$$

Alors pour $x \in \operatorname{supp}(\psi_k) \subseteq]-1,2[$,

$$|\psi_k(x)| \leq |\psi(x)|\int_0^x\int_0^{\frac{1}{k}}\|\varphi\|_{L^\infty}dtdy \leq 2\|\psi\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^\infty}\frac{1}{k}$$

donc $\|\psi_k\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. De même,

$$\psi_k'(x) = \psi'(x)\int_0^x\int_0^y \varphi(kt)dtdy + \psi(x)\int_0^x \varphi(kt)dt$$

vérifie $\|\psi_k'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est ainsi majoré par C/k.

D'autre part, comme $\psi_k(0) = \psi_k'(0) = 0$,

$$\langle u, \psi_k\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_k\left(\frac{1}{i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\psi_k\left(\frac{1}{i}\right) + \sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k\left(\frac{1}{i}\right).$$

Remarquons que, par une simple inégalité triangulaire, on voit que $|\psi_k(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\frac{x^2}{2}$ si $x \in [0,1]$. Donc

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\psi_k\left(\frac{1}{i}\right)\right| \leq C\|\varphi\|_{L^\infty}1/k.$$

Enfin, sur $[1/k,1]$, comme $t\mapsto\varphi(kt)$ s'annule, pour $x\in[1/k,1]$,

$$\begin{aligned}\psi_k(x) &= \int_0^{\frac1k}\int_0^y \varphi(kt)dtdy + \int_{\frac1k}^x\int_0^{\frac1k}\varphi(kt)dtdy + \int_{\frac1k}^x\int_{\frac1k}^y\varphi(kt)dtdy\\ &= \int_0^{\frac1k}\int_0^y\varphi(kt)dtdy + \left(x-\frac1k\right)\int_0^{\frac1k}\varphi(kt)dt.\end{aligned}$$

Par conséquent, ψ_k est affine de pente $1/k$ sur $[1/k,1]$, et donc

$$\sum_{i=1}^k \psi_k\left(\frac1i\right) = \sum_{i=1}^k\left(\psi_k\left(\frac1k\right)+\frac1k\left(\frac1i-\frac1k\right)\right) = k\psi_k\left(\frac1k\right)+\frac{\log k}{k}+O\left(\frac1k\right).$$

Comme $|\psi_k(x)|\leq\|\varphi\|_{L^\infty}\frac{x^2}{2}$ sur $[0,1]$, $k\psi_k(1/k)=O(\frac1k)$. Cela prouve que

$$\langle u,\psi_k\rangle = \sum_{i=1}^\infty \psi_k\left(\frac1i\right)\gtrsim\frac{\log k}{k},$$

d'où la conclusion.

⋆

Solution 6. *Théorème de Banach-Steinhaus et distributions*

1. Supposons B non maigre dans X, i.e. B n'est inclus dans aucune union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Montrons que $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue. Soit W un voisinage de 0 dans Y. On peut supposer sans perte de généralité que W est fermé et équilibré (si $x\in W$, alors pour tout $\lambda\in[-1,1]$, $\lambda x\in W$) : en effet, il existe des semi-normes $(\rho_i)_{i=1,\dots,n}$ telles que $\{x\in E\mid\ \forall i\in[\![1,n]\!],\rho_i(x)<1\}\subset W$, et on peut considérer $\{x\in E\mid\ \forall i\in[\![1,n]\!],\rho_i(x)\leq 1/2\}$ qui est un voisinage fermé et équilibré de 0 contenu dans W. On introduit, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$B_n^W=\{x\in E\mid\ \forall i\in I,\, T_i(x)\in nW\}=\bigcap_{i\in I}T_i^{-1}(nW).$$

Ce sont des fermés de E et $B=\bigcup_n B_n^W$ par hypothèse. Comme B est non maigre, l'un des B_n^W est d'intérieur non vide, il contient un ouvert V_1 de E. Soit $x\in V_1$, alors $V_2=V_1-x\subset B_{2n}^W$ est un voisinage de 0. Cela signifie que

$$\forall i\in I,\quad T_i(V_2)\subset 2nW.$$

Ainsi, $V=\frac{1}{2n}V_2$ convient.

Montrons que $B=E$. Soit $x\in E$, et W voisinage de 0 dans F. Comme $\lambda\mapsto\lambda x$ est continue, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac1n x\in V$ ou V est associé à W. On en déduit que $\{T_i(x)\}_{i\in I}\subset nW$, et donc $\{T_i(x)\}_{i\in I}$ est borné, ce qui signifie que $x\in B$.

2. Si $\ell\in E^*$, il existe des semi-normes $(\rho_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ telles que pour tout $x\in E$, $|\ell(x)|\leq C\sum_{i=1}^n\rho_i(x)$. Par simplicité, notons $\rho(x)=C\sum_{i=1}^n\rho_i(x)$. Si A est borné, comme $\{x\mid\ \rho(x)<1\}$ est un ouvert contenant 0, il existe n tel que pour tout $x\in A$, $\rho(x)<n$. On en déduit que $\ell(A)\subset]-n,n[$.

Réciproquement, soit A tel que pour tout $\ell\in E^*$, $\ell(A)$ est borné.

Supposons tout d'abord que $(E,\|\cdot\|)$ est un evn. On considère la famille d'évaluations $\varphi_x\ :\ell\in E^*\mapsto\ell(x)\in\mathbb{R}$, $x\in A$. Par hypothèse, pour tout $\ell\in E^*$, $\sup_{x\in A}|\varphi_x(\ell)|<+\infty$. Comme E^* est complet, par le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_{x\in A}\|\varphi_x\|_{E^{**}}<+\infty$. Mais le théorème de Hahn-Banach assure que $\|\varphi_x\|_{E^{**}}=\|x\|_E$, et donc A est borné.

Revenons au cas général. Soit U un voisinage de 0, quitte à remplacer les semi-normes comme précédemment, on peut supposer que $U = \{x \in E \mid \ \rho(x) < 1\}$ pour une semi-norme ρ. Considérons le quotient $G = E/\{x \in E \mid \ \rho(x) = 0\}$. Notons $s : E \to G$ la surjection canonique, et remarquons que si $\rho(x-y) = 0$, $\rho(x) = \rho(x-y+y) \leq \rho(y)$ et $\rho(y) = \rho(y-x+x) \leq \rho(x)$ donc $\rho(x) = \rho(y)$. Ainsi, on peut définir pour $\bar{x} \in G$, $\|\bar{x}\| = \rho(x)$ où $s(x) = \bar{x}$: c'est une norme sur G. Soit $\ell \in G^*$, on peut étendre ℓ à E par $\tilde{\ell}(x) = \ell(s(x))$. Alors $|\tilde{\ell}(x)| \leq \rho(x)$ donc $\tilde{\ell}$ est continue, et par définition,

$$\sup_{\bar{x} \in s(A)} |\ell(\bar{x})| = \sup_{x \in A} |\tilde{\ell}(x)| < +\infty.$$

Ainsi, on peut conclure de la première étape que $s(A)$ est borné dans G : il existe n tel que pour tout $\bar{x} \in s(A)$, $\|\bar{x}\| \leq n$. Si $x \in A$, $\rho(x) = \|\bar{x}\| \leq n$ et ainsi, $A \subseteq nU$. A est donc borné.

3. Il suffit d'appliquer la question précédente avec $E = \mathcal{D}(\Omega)$.

4. Grâce à la question précédente, $(\varphi_n)_n$ est une suite bornée de $\mathcal{D}(\Omega)$.

On commence par montrer qu'il existe un compact K de Ω tel que pour tout n, $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K$. En effet, si ce n'est pas le cas, quitte à extraire une sous-suite, soit $(K_n)_n$ une suite exhaustive de compacts ($K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ et $\bigcup_n K_n = \Omega$) telle que pour tout n, $\mathrm{supp}(\varphi_{n+1}) \cap (K_{n+1} \setminus K_n) \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{C}^\infty_{K_n}(\Omega)$ est un convexe fermé dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on construit par récurrence au moyen du théorème de Hahn-Banach des distributions $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ qui séparent $\mathcal{C}^\infty_{K_n}(\Omega)$ et $\{\varphi_n\}$, et l'on peut les choisir telles que

$$T_n|_{\mathcal{D}_{K_n}} = 0$$

et

$$T_n(\varphi_n) = n - \sum_{i=1}^{n-1} T_i(\varphi_n).$$

Soit $T := \sum_n T_n$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{K_n}(\Omega)$, la somme est finie, donc $T|_{\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)}$ est continue sur $\mathcal{C}^\infty_{K_n}(\Omega)$, ce qui assure que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Mais $T(\varphi_n) = n \to +\infty$, donc $(\varphi_n)_n$ n'est pas bornée : contradiction.

La suite $(\varphi_n)_n$ est donc bornée dans $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$. En effet, si $T \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)^*$, il existe une semi-norme $\rho(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$, $m \in \mathbb{N}$, sur $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$, et $C > 0$ tels que $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\rho(\varphi)$ sur $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$. On peut l'étendre grâce au théorème de Hahn-Banach en $\tilde{T} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $|\langle \tilde{T}, \varphi\rangle| \leq C\tilde{\rho}(\varphi)$ où $\tilde{\rho}$ est l'extension de la semi-norme ρ en une semi-norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$: $\tilde{\rho}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$. Mais alors $(T(\varphi_n))_n = (\tilde{T}(\varphi_n))_n$ est bornée par hypothèse. Il suffit alors d'appliquer la question 2. avec $E = \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$ tel que pour tout $|\alpha| \leq k$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\partial^\alpha \varphi_n\|_{L^\infty} \leq M_k$. On conclut grâce au théorème d'Ascoli et à une extraction diagonale. Pour tout k, on construit une extraction σ_k telle que $\varphi_{\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k(n)}$ converge vers une certaine fonction φ^k dans $\mathcal{C}^k(K)$ (en utilisant la borne uniforme de $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$ pour $|\alpha| = k+1$, qui donne l'équicontinuité de $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$, $|\alpha| = k$). En identifiant les limites, on peut définir $\varphi = \varphi^k$ pour tout k. Puis, en posant $\sigma(n) = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n(n)$, on obtient la sous-suite désirée.

5. On applique le théorème de Banach-Steinhaus (question 1.) avec $E = \mathcal{D}(\Omega)$, $F = \mathbb{R}$, et la suite d'opérateurs $(T_n)_n$. On en déduit que $(T_n)_n$ est équicontinue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, et ses restrictions à chaque $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ le sont également : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$, $|\langle T_n, \varphi\rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$. Mais $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ est séparable car K est compact, donc par extraction diagonale pour une suite $(\varphi^K_p)_p$ dense dans $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$, on peut extraire de $(T_n)_n$ une sous-suite telle que $(T_n\varphi^K_p)_n$ converge vers un certain $T\varphi^K_p$ pour tout p, ce qui définit une forme linéaire continue T sur $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$. Par une seconde extraction diagonale pour une suite exhaustive de compacts $(K_l)_l$ de Ω, on obtient une sous-suite de $(T_n)_n$ qui est convergente vers une distribution T sur chaque $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$, K compact de Ω, c'est-à-dire qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Étant donné un borné A de $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe un compact K tel que $A \subset \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ (reprendre le raisonnement du début de la question 4.). Par équicontinuité de $(T_n)_n$ sur $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, il existe $m \in \mathbb{N}$, et $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, $|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$ (et donc $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$). Il y a en fait convergence uniforme sur A. En effet, dans le cas contraire, soit $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout n,

$$|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T_n, \varphi_n \rangle| \geq \varepsilon.$$

Alors comme dans la question 4., le théorème d'Ascoli permet d'extraire une sous-suite qui converge dans $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ vers une certaine fonction φ, mais alors

$$\liminf_n |\langle T, \varphi \rangle - \langle T_n, \varphi \rangle| \geq \varepsilon,$$

ce qui est exclus par convergence de $(T_n)_n$ vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

⋆