Correction du Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Sobolev et compacité

Séance du 4 avril 2014

Solution 1. *Quelques questions sur les espaces de Sobolev H^s*

1. On remarque que $\hat{\delta}_0 = 1$, puis que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s d\xi < +\infty$ ssi $s < -d/2$. Pour montrer l'injection de H^s dans $\mathcal{C}_0$, c'est dans la même veine : pour avoir le résultat on peut montrer que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dès que $s > d/2$ et on conclut par le lemme de Riemann-Lebesgue.

2. Soit m l'ordre de u dans $\mathcal{E}'$. La T.F. de u est bien définie car $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. On veut montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ pour lequel $\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2} \in L^2$. On prend φ fonction test dans $\mathcal{S}$ et on évalue :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}, \varphi\rangle &= \langle \hat{u}, (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\rangle \\
&= \langle u, \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\rangle \\
&\leq C \sup_{|\alpha|\leq m, x\in K} \left|\partial^\alpha \mathcal{F}\left((1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\right)\right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{m/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi d\xi \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^m(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2} \|\varphi\|_{L^2}
\end{aligned}$$

(on a utilisé successivement des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, la définition d'une distribution à support compact et pour la dernière inégalité, c'est Cauchy-Schwarz). On conclut par densité de $\mathcal{S}$ dans L^2 et par dualité.

3. Il suffit de remarquer $(1+|\xi|^2)^{s_1} \geq (1+|\xi|^2)^{s_2}$ pour $s_1 \geq s_2$.

4. Par le théorème des accroissements finis (appliqué à $\exp(-i\cdot)$), on a :

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| \leq |x\cdot\xi - y\cdot\xi| = |x-y||\xi|.$$

Et donc en interpolant, on a pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$|e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}| = |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^\alpha |e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}|^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha}|x-y|^\alpha|\xi|^\alpha.$$

On a alors :

$$u(x) - u(y) = C\int \hat{u}(\xi)\left(e^{-ix\xi} - e^{-iy\xi}\right) d\xi.$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq \int |\xi|^\alpha|\hat{u}|(\xi)d\xi \\
&\leq \left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{d+\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+|\xi|)^{d+\varepsilon+2\alpha}|\hat{u}|^2(\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(\varepsilon)\|u\|_{H^{\frac{d+\varepsilon}{2}+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $\alpha \in]0, s-d/2[$, on a (avec $\varepsilon = 2s - d - \alpha > 0$) :

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|u(x)| = \left|\int \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| &\leq \int |\hat{u}|(\xi)d\xi \leq \int |\hat{u}|(\xi)\frac{(1+|\xi|^2)^{s/2}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi \\ &\leq \left(\int |\hat{u}|^2(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{1/2}\left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{1/2} \leq C(s)\|u\|_{H^s}.\end{aligned}$$

car $s > d/2$ donc $1/(1+|\xi|^2)^s \in L^1(d\xi)$. Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty} + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(\alpha)\|u\|_{H^s}.$$

Par densité, on conclut que $H^s \subset C^\alpha$ avec injection continue.

⋆

Solution 2.

1. Traitons pour commencer le cas où f est continue à support compact .

Notons que $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ est uniformément continue (car à support compact). Cela signifie exactement que

$$\lim_{h\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x+h)-f(x)| = 0,$$

qui est le résultat demandé.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, tel que $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$. Le support de g est inclu dans $B(0,R)$. Soit alors $\delta \in]0,1[$ tel que si $|h| < \delta$, $\|g - \tau_h g\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon/(1+R)^{d/p}$.

Alors, comme $\mathrm{Supp}(g-\tau_h g) \subset B(0,R+1)$, on a

$$\|g-\tau_h g\|_{L^p} \leq \|g-\tau_h g\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}\left(\int \mathbb{1}_{x\in B(0,R+1)}dx\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon}{(1+R)^{d/p}}(1+R)^{d/p} \leq \varepsilon.$$

Enfin, $\|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} = \|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$. Ainsi, si $|h| < \delta$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p} \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g-f\|_{L^p} \leq 3\varepsilon.$$

2. Comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, elle est bornée (d'une suite f_n telle que $\|f_n\| \to \infty$, on ne peut extraire aucune sous-suite convergente).

D'autre part, supposons que $\mathcal{F}$ ne vérifie pas (*). Il existe donc une suite $f_n \in \mathcal{F}$, $h_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h_n| \to 0$ et $\varepsilon > 0$ telle que $\|\tau_{h_n}f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$.

Quitte à extraire, on peut supposer que $f_n \to f$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Or on a

$$\tau_{h_n}f - f = (\tau_{h_n}f - \tau_{h_n}f_n) + (\tau_{h_n}f_n - f_n) + (f_n - f).$$

Comme :

$$\begin{aligned}\|\tau_{h_n}f - \tau_{h_n}f_n\|_{L^p(\Omega)} &= \|f-f_n\|_{L^p(\Omega)} \to 0, \\ \|\tau_{h_n}f_n - f_n\|_{L^p(\Omega)} &\geq \varepsilon, \\ \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} &\to 0,\end{aligned}$$

on en déduit que $\liminf \|\tau_{h_n} f - f\|_{L^p(\Omega)} \geq \varepsilon$, ce qui contredit 1.

3. Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov. On peut s'aider de l'exercice 2 du TD 4.

⋆

Solution 3. *Un problème elliptique non linéaire*

1. On a :

$$H^1_g(\Omega) = g + H^1_0(\Omega).$$

2. Soit donc u_n une suite de minimiseurs, alors bien sûr $\int_\Omega |\nabla u_n|^2$ est une suite bornée, et donc $\int_\Omega |\nabla(u_n - u_0)|^2$ est bornée. Mais $u_n - u_0 \in H^1_0(\Omega)$, et par l'inégalité de Poincaré, $\int_\Omega |\nabla u|^2$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H^1_0(\Omega)$. Ainsi, quitte à extraire, $u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ $H^1_0(\Omega)$-faible et par injection de Sobolev, dans $L^{p+1}(\Omega)$-faible. Comme $u - u_0 \in H^1_0(\Omega)$, $u \in H^1_g(\Omega)$.

On remarque que la fonctionnelle est fortement s.c.i. et convexe donc elle est faiblement s.c.i. En prenant la limite faible, on obtient

$$\int |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \int |\nabla u_n|^2, \quad \int |u|^{p+1} \leq \liminf_{n\to\infty} \int |u|^{p+1}.$$

Or $J(u_n) \to \inf J(v)$ par définition et donc u réalise le minimum.

Le minimiseur est unique car la fonctionnelle est strictement convexe.

3. Comme u est un minimiseur, on a que $J(u+tv) \geq J(u)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v \in H^1_0$. Notons $F(x) = \frac{1}{p+1}|x|^{p+1}$, $f(x) = |x|^{p-1}x$. En développant, cela donne

$$t\int \nabla u \nabla v + \frac{t^2}{2}\int |\nabla v|^2 + \int F(u+tv) - F(u) \geq 0.$$

On divise par t, et on fait tendre $t \to 0$ par valeur positives. Or par Taylor-Lagrange, on a pour chaque $x \in \Omega$

$$\frac{1}{t}(F(u+tv) - F(v)) - f(u)v = t\int_0^1 f'(u+\theta t v)(1-\theta)d\theta.$$

En particulier, vu que $|f'(x)| \leq C(1+|x|^{p-1})$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \int_0^1 f'(u+\theta t v)(1-\theta)d\theta dx\right| \\
&\leq \int_0^1 \int_\Omega |f'(u+\theta t v)|dx d\theta \\
&\leq C\int_0^1 \int (1 + 2^{p-1}|u|^{p-1} + 2^{p-1}|v|^{p-1})dx \leq C(u,v),
\end{aligned}$$

pour $t \leq 1$. En particulier, on a donc

$$\frac{1}{t}\int (F(u+tv) - F(v)) \to \int f(u)v,$$

et donc

$$\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \geq 0.$$

De même en faisant tendre t vers 0 par valeurs négatives, on trouve que $\int \nabla u \nabla v + \int f(u)v \leq 0$. Ceci est vrai pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$; il s'agit bien de la formulation faible souhaitée.

⋆

Solution 4. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

On remarque pour commencer que sur $H_0^1(\Omega)$, on a l'inégalité de Poincaré donc la norme H^1 est équivalente à la norme L^2 du gradient.

1. Comme d'habitude (revoir le cours au besoin) on considère une suite minimisante (w_k) dans $\mathcal{A}$ telle que :

$$I(w_k) \to \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

En particulier w_k est borné dans H_0^1 donc on peut (quitte à extraire) supposer que $w_k \rightharpoonup u$ faiblement dans H_0^1. Par l'inégalité de Fatou, on a bien $I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w)$.

Mais ce n'est pas fini, il faut vérifier que $J(u) = 0$. Pour cela, par injection compacte de H^1 dans L^2 on a $w_k \to u$ fortement dans L^2. On écrit ensuite :

$$|J(u)| = |J(u) - J(w_k)| \leq \int_\Omega |G(u) - G(w_k)|.$$

Je vous laisse conclure.

2. C'est un peu plus délicat que d'habitude à cause de la "non linéarité" de G : si $v \in \mathcal{A}$, on n'a pas forcément $u + tv \in \mathcal{A}$. Voilà comment on s'en sort quand même. On fixe v une fonction de $H_0^1(\Omega)$.

Commençons par supposer que $g(u)$ n'est pas nul presque partout. On peut alors choisir w dans $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega g(u)w \neq 0.$$

On considère alors $j(\tau, \sigma) = J(u + \tau v + \sigma w)$. On vérifie que l'on a

$$j(0,0) = 0, \quad \frac{\partial j}{\partial \sigma}(0,0) \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un C^1 difféomorphisme ϕ tel que $\phi(0) = 0$ et pour $|\tau|$ assez petit :

$$j(\tau, \phi(\tau)) = 0$$

On considère à présent $i(\tau) = I(u + \tau v + \phi(\tau)w)$ (on a bien $u + \tau v + \phi(\tau)w \in \mathcal{A}$). Comme u est minimum, i a un minimum en 0, ce qui entraine :

$$\int_\Omega \nabla u.(\nabla v + \phi'(0)\nabla w) = 0.$$

Or (pour le voir, différencier $j(\tau, \phi(\tau)) = 0$) ,

$$\phi'(0) = -\frac{\int_\Omega g(u)v}{\int_\Omega g(u)w}.$$

On définit alors

$$\lambda = \frac{\int_\Omega \nabla u.\nabla w}{\int_\Omega g(u)w}.$$

Dans le cas où $g(u) = 0$ p.p., alors $\nabla G(u) = 0$ p.p. . Donc comme Ω est connexe, $G(u) = C$ p.p., puis $G(u) = 0$ p.p.

Par le théorème de trace, $G(u) = 0$ sur $\partial\Omega$. Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a forcément $G(0) = 0$. Cela implique que $0 \in \mathcal{A}$.

Donc on a $u = 0$, car sinon $I(u) > I(0) = 0$. L'identité demandée est donc trivialement vérifiée pour n'importe quel λ.

⋆