

Correction du Td n° 7 d'Analyse fonctionnelle

THÉORIE SPECTRALE – DISTRIBUTIONS

Séance du 27 mars 2015

Exercice 1. Spectre de la multiplication

Si λ n'est pas dans l'image essentielle de F , il existe $\varepsilon > 0$ $|F - \lambda| > \varepsilon$ presque sûrement, donc $T_F - \lambda$ est inversible, d'inverse borné par $\frac{1}{\varepsilon}$, donc λ n'appartient pas au spectre de T_F .

Si λ est dans l'image essentielle de F , on peut construire f_n de norme 1, telle que $f_n = 0$ en dehors de $|T_F - \lambda| < \frac{1}{n}$. On a alors $(T_F - \lambda)f_n \rightarrow 0$. Si $T_F - \lambda$ était inversible, on aurait

$$\|f_n\| \leq C \|(T_F - \lambda)f_n\|$$

donc $f_n \rightarrow 0$. Ainsi λ est dans le spectre de T_F .

★

Solution 1. Partition de l'unité et fonction plateau

1. Considérons $f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$ pour $|x| < 1$ et $f(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On vérifie par récurrence que pour $|x| < 1$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} e^{-\frac{1}{1-x^2}},$$

où P_n est polynôme. En particulier, $\frac{d^n}{dx^n} f$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \pm 1$, et par prolongement de la dérivée, f est une fonction C^{n-1} pour tout n , donc C^∞ , à support dans $[-1, 1]$. On pose $h(x) = C \int_{-\infty}^x f(x) dx$, où la constante C est ajustée pour que $h(x) = 1$ si $x \geq 1$. h est positive, croissante et pour $x \leq -1$, $h(x) = 0$. La fonction $g(x) = h(3+2x)h(3-2x)$ répond à la question.

2. Soit x_n une suite dense de Ω . Si c'est possible, on choisit ε_n tel que $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ pour un certain i , et $B(x_n, 3\varepsilon_n)$ n'est inclus dans aucun V_i : sinon, on choisit $\varepsilon_n = 1$, et $B(x_n, 3) \subset V_i$. Montrons que pour tout $x \in \Omega$, il existe n tel que $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Soit i tel que $x \in V_i$, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V_i$. Soit x_n tel que $d(x, x_n) < \varepsilon/4 < 1$. Si $\varepsilon_n = 1$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Sinon $B(x_n, 3\varepsilon/4) \subset B(x, \varepsilon) \subset V_i$, donc $3\varepsilon_n \geq 3\varepsilon/4$. Ainsi, $\varepsilon_n \geq \frac{\varepsilon}{4}$ et $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$. Dans tous les cas $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$.

On pose $\psi_n(x) = g(|x - x_n|/\varepsilon_n)$: alors ψ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n) \subset V_i$ et $\psi_n|_{B(x_n, \varepsilon_n)} = 1$. On définit maintenant $\varphi_1 = \psi_1$ et :

$$\varphi_n = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{n-1}) \psi_n.$$

On vérifie immédiatement par récurrence que pour tout n :

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_n).$$

Si $x \in \Omega$, $x \in B(x_n, \varepsilon_n)$ pour un certain n et donc $\varphi_m(x) = 0$ pour $m > n$ et :

$$\sum_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) = 1.$$

D'autre part, φ_n est à support dans $B(x_n, 2\varepsilon_n)$, donc dans l'un des V_i . Enfin, si K est un compact de Ω , il existe m tel que $K \subset \bigcup_{n=1}^m B(x_n, \varepsilon_n)$ d'où le résultat.

3. K étant compact, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $V_\varepsilon = \{x | d(x, K) < \varepsilon\}$ soit un voisinage ouvert de K , d'adhérence compacte, et inclus dans Ω . On considère le recouvrement de Ω par les ouverts $V_{2\varepsilon_0/3}$ et $\Omega \setminus \overline{V_{\varepsilon_0/3}}$. Par la question précédente, on dispose d'un partition de l'unité φ_n . On pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n: \text{Supp } \varphi_n \subset V_{2\varepsilon_0/3}} \varphi_n(x).$$

Alors la somme étant localement finie, φ est C^∞ à support dans $V_{2\varepsilon_0/3}$, donc compact et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Enfin, pour $x \in V_{\varepsilon_0/3}$,

$$\varphi(x) = 1 - \sum_{n: \text{Supp } \varphi_n \subset \Omega \setminus \overline{V_{\varepsilon_0/3}}} \varphi_n(x) = 1.$$

Ainsi φ répond à la question.

★

Solution 2. *Support d'une distribution*

1. Soit O_i des ouverts sur lesquels u est nulle, et $\phi \in \mathcal{D}(\bigcup_i O_i)$. Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité adaptée à $(O, (O_i)_{i \in I})$.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(O)$, $\text{Supp}(\phi)$ est un compact, donc par construction des $(\psi_n)_n$, il existe un nombre m fini de (ψ_n) tel que $\sum_{n=1}^m \psi_n|_{\text{Supp}(\phi)} = 1$. En particulier, cela signifie que

$$\phi = \sum_{n=1}^m \psi_n \phi.$$

Mais $\psi_n \phi \in \mathcal{D}(O_i)$ pour un certain i , donc $(u, \psi_n \phi) = 0$ pour tout n . En sommant les m premiers termes, on voit que $(u, \phi) = 0$. Ainsi, u est nulle sur $\bigcup O_i$.

L'union des ouverts sur lesquels u est nul est donc un ouvert sur lequel u est nul : le support de u est son complémentaire.

2. Soit $\psi \in C^0(\Omega)$, $\text{Supp } \psi = \overline{\{x | \psi(x) \neq 0\}}$. Considérons donc O , l'intérieur de $\{x | \psi(x) = 0\}$. Si $x_0 \in O$, il existe un voisinage $B(x_0, \varepsilon)$ sur lequel ψ est nulle, et donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(B(x_0, \varepsilon))$, $(\psi, \phi) = \int \psi \phi = 0$ et donc ψ s'annule sur $B(x_0, \varepsilon)$ au sens des distributions.

Réciproquement, si ψ s'annule sur un ouvert O au sens des distributions, soit $x_0 \in O$ et $B(x_0, \varepsilon) \subset O$. Soit ϕ_k une approximation de l'unité $\phi \in \mathcal{D}(B(0, 1))$ d'intégrale 1 et $\phi_k(x) = k^{-n} \phi(k(x - x_0))$: alors ϕ_k est d'intégrale 1 et est support dans $B(x_0, 1/k)$. Pour k assez grand, $\phi_k \in \mathcal{D}(B(x_0, \varepsilon)) \subset \mathcal{D}(O)$ et on voit que

$$\int \phi_k \psi \rightarrow \psi(x_0).$$

Comme $(\phi_k, \psi) = 0$, on en déduit que $\psi(x_0) = 0$, et comme cela est vrai pour tout $x \in O$, $x_0 \notin \text{Supp}(\psi)$.

Support de δ_0 : si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, alors $\delta_0(\phi) = 0$. Ainsi $\text{Supp}(\delta_0) \subset \{0\}$. Mais comme $\delta_0 \neq 0$, $\text{Supp}(\delta_0) = \{0\}$.

3. Soit u une distribution à support compact K . il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi = \mathbb{1}$ sur un voisinage V (compact) de K . Alors pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\text{Supp}(\phi(1 - \psi)) \subset \overline{V^c} \subset K^c$, donc $(u, \phi(1 - \psi)) = 0$ et $(u, \phi) = (u, \phi\psi)$.

Maintenant, $\text{Supp}(\phi\psi) \subset V$ compact fixe, donc il existe des constantes $C(V) > 0$ et $m(V) \in \mathbb{N}$ telle que :

$$|(u, \phi\psi)| \leq C(V)\|(\phi\psi)\|_{m(V)} \leq C(\psi, V)\|\phi\|_{m(V)}.$$

(par la formule de Leibniz), V et ψ sont fixes, donc $C(\psi, V) = C'$, $m(V) = m$, et finalement u est d'ordre m : $|(u, \phi)| \leq C'\|\phi\|_m$.

★

Solution 3. *Quelques exemples de distributions*

1. La formule définit bien une distribution (d'ordre au plus k sur le compact $[-k, k]$). Supposons l'ordre fini, disons k , alors, en faisant une translation de $k + 1$, il existe C , tel que pour $\phi \in \mathcal{D}([-1, 1])$, on ait

$$|\phi^{(k+1)}(0)| \leq C \sum_{i=1}^k \sup_{x \in]-1, 1[} |\partial^i \phi(x)|.$$

Une telle inégalité ne peut pas avoir lieu, vu qu'il existe des fonctions \mathcal{C}^k qui ne sont pas \mathcal{C}^{k+1} .

2. On calcule :

$$(\partial_x u + \partial_y u, \phi) = - \int (\phi_x(t, t) + \phi_y(t, t))dt = - \int \frac{d}{dt}(\phi(t, t))dt = 0.$$

3. $e^{1/x^2} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ car étant donné un compact K de \mathbb{R}_+^* , $e^{1/x^2} \in C^0(K)$. Par contre, considérons $\phi \in \mathcal{D}([1, 2])$ positive, d'intégrale 1, et la suite $\phi_k(x) = 2^{-k}\phi(kx)$. Alors on calcule et $\phi_k \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: en effet, $\phi_k \in \mathcal{D}([0, 2])$ et pour tout m ,

$$\|\partial_x^m \phi_k\|_{C^0} = 2^{-k}k^m \|\partial_x^m \phi\|_{C^0} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Mais :

$$\int e^{1/x^2} \phi_k(x)dx \geq e^{k^2/4} 2^{-k} \frac{1}{k} \rightarrow \infty.$$

4. Soit K un compact de Ω , il s'agit de montrer qu'il existe C_K tel que pour tout $\phi \in C_c^\infty(K)$, $|(u, \phi)| \leq C_K \|\phi\|_{C^0(K)}$.

Considérons une fonction plateau ψ_K , positive : $\psi_K \in \mathcal{D}(\Omega)$ et vaut 1 au voisinage de K .

Alors $\phi + \|\phi\|_{C^0(K)}\psi_K \geq 0$ et $\|\phi\|_{C^0(K)}\psi_K - \phi \geq 0$ donc :

$$(u, \phi) \geq -\|\phi\|_{C^0(K)}(u, \psi_K), \quad \text{et} \quad (u, \phi) \leq \|\phi\|_{C^0(K)}(u, \psi_K),$$

soit :

$$|(u, \phi)| \leq (u, \psi_K)\|\phi\|_{C^0(K)}.$$

C'est le résultat avec $C_K = (u, \psi_K)$.

5. On cherche v tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(v, \phi') = -(u, \phi)$. Il faut remarquer que les fonctions de \mathcal{D} d'intégrale nulle sont exactement les dérivées de fonctions de \mathcal{D} . Ainsi, si ψ est d'intégrale nulle, $\psi = \phi'$ ($\phi \in \mathcal{D}$ est uniquement déterminée : $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)dt$) et $(v, \psi) = -(u, \phi)$.

Maintenant, soit $\chi \in \mathcal{D}$, d'intégrale 1. On choisit comme on veut (v, χ) : ensuite, si $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi - (\int \psi)\chi$ est d'intégrale nulle, donc c'est un certain ϕ' , et :

$$(v, \psi) = -(u, \phi) + \left(\int \psi \right) (v, \chi).$$

On obtient ainsi un espace de dimension 1 de primitives de u .

Réciproquement, si v est une primitive de u , v est déterminé sur l'hyperplan des fonctions de \mathcal{D} d'intégrale nulle, et sa valeur en χ la définit complètement, donc l'espace des primitives est de dimension 1.

★

Solution 4. *Distribution dont le support est un point*

1. Par construction, $\text{Supp}(1 - \psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0, r/2)$. Soit alors $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\text{Supp}(1 - \psi_r)\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0, r/2)$ et donc par définition,

$$(u, (1 - \psi_r)\phi) = 0 = (u, \phi) - (\psi_r u, \phi).$$

D'où le résultat.

2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage K tel que si $|\alpha| = m$:

$$\forall x \in K, \quad |(D^\alpha \phi)(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrons par récurrence décroissante sur $|\alpha|$ que :

$$\forall \alpha, |\alpha| \leq m, \quad \forall x \in K, \quad |(D^\alpha \phi)(x)| \leq \varepsilon n^{m-|\alpha|} |x|^{m-|\alpha|}.$$

Pour $|\alpha| = m$, c'est ce qui précède. On suppose que c'est démontré pour $|\alpha| = k + 1$. Soit β de longueur k . Alors :

$$\nabla(D^\beta \phi) = (\partial_{x_1} D^\beta \phi, \dots, \partial_{x_n} D^\beta \phi).$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$|\nabla(D^\beta \phi)|(x) \leq n \cdot (\varepsilon n^{m-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|}) \leq \varepsilon n^{m-|\beta|} |x|^{m-|\alpha|}.$$

On applique alors le théorème des accroissement finis, avec $D^\beta(\phi)(0) = 0$, ce qui achève la récurrence.

On calcule maintenant par la formule de Leibniz :

$$D^\alpha(\psi_r \phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} \psi) \left(\frac{x}{r} \right) (D^\beta \phi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Soit r assez petit de sorte que $B(0, r) \subset K$. Alors $\text{Supp}(\psi_r \phi) \subset B(0, r) \subset K$.

Or pour $x \in B(0, r) \subset K$, et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha(\psi_r \phi)(x)| \leq C(n, m) \varepsilon \|\psi\|_{|\alpha|} \|\phi\|_{|\alpha|} r^{m-|\alpha|}.$$

Cette majoration est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Finalement, en sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m , on obtient :

$$\|\psi_r \phi\|_m \leq C(n, m) \varepsilon \|\psi\|_m \|\phi\|_m.$$

(Pourvu que $r \leq 1$). D'où le résultat.

3. Comme u est d'ordre m , il existe C tel que $|(u, \phi)| \leq C\|\phi\|_m$. Maintenant :

$$|(u, \phi)| = |(u, \psi_r \phi)| \leq C\|\psi_r \phi\|_m \rightarrow 0 \text{ quand } r \rightarrow 0.$$

Donc $(u, \phi) = 0$.

4. On a montré que $\bigcap_{k=0}^m \text{Ker } \delta_0^{(k)} \subset \text{Ker } u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u \in \text{Vect}(\delta_0^{(k)}, k \in \llbracket 0, m \rrbracket)$, ce qui est le résultat demandé.

★