Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 7

Révisions pour le partiel

Séance du 13 mars 2017

Solution 1. *Échauffement*

Supposons que $\ker T$ est complémenté dans X, *i.e.* qu'il existe un sous espace fermé $G \subset X$ tel que $X = G \oplus \ker T$. Alors $T|_G$ est une bijection continue de G dans Y, soit entre deux Banach, donc c'est un homéomorphisme par le théorème de l'application ouverte. Notons $R := (T|_G)^{-1}$. On a $R : Y \to X$, et $TR = \mathrm{id}_Y$.

Réciproquement, s'il existe $R : Y \to X$ continu tel que $TR = \mathrm{id}_Y$, alors $\operatorname{Im} R$ est fermé (en effet, si $R(y_n) \to x$, alors $TR(y_n) = y_n \to T(x)$, donc $R(y_n) \to RT(x) \in \operatorname{Im} R$). On a donc $\operatorname{Im} R \oplus \ker T = E$, car $\operatorname{Im} R \cap \ker T = \{0\}$, et pour tout $x \in E$, il existe $\tilde{y} \in Y$ tel que $T(x) = TR(\tilde{y})$, et on écrit alors $x = (x - R(\tilde{y})) + R(\tilde{y})$.

⋆

Solution 2. *Opérateur de Volterra*

1. Observons que si $f \in E$, et $x, y \in [0,1]$,

$$|V(f)(x)| \leq \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2},$$
$$|V(f)(x) - V(f)(y)| = \left|\int_y^x f(t) dt\right| \leq \|f\|_{L^2} |x-y|^{\frac{1}{2}},$$

donc V est à valeurs dans les fonctions continues bornées (en particulier, $V : E \to E$ est continue, puisque l'injection $L^\infty([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ l'est). D'autre part, les estimées ci-dessus permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli à $V(B_E)$, qui est donc relativement compacte dans $C([0,1])$, et par suite dans E.

Comme V est compact, son spectre contient 0. Par ailleurs, on sait que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(V) \setminus \{0\}$, alors λ est une valeur propre (et de multiplicité finie). Or si $V(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$, alors f est continue (dans l'image de V), donc dérivable, et $f' = f/\lambda$. Comme $f(0) = 0$, cela impose $f \equiv 0$, et donc λ n'est pas valeur propre. Ainsi $\mathrm{Sp}(V) = \{0\}$.

2. Introduisons la fonction K définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On écrit ainsi V comme un opérateur à noyau : $V(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$. De la sorte, si $f, g \in E$, grâce au théorème de Fubini,

$$\langle V(f), g \rangle = \iint_{[0,1]^2} K(x,y) f(y) g(x) dx dy = \int_0^1 f(y) \left(\int_0^1 K(x,y) g(x) dx\right) dy = \langle f, V^*(g) \rangle,$$

et donc $V^*(g)(y) = \int_0^1 K(x,y) g(x) dx = \int_y^1 g(x) dx$.

3. VV^* est un opérateur autoadjoint, compact et positif. La théorie spectrale pour ces opérateurs nous dit donc que $\|VV^*\|$ est égale à sa plus grande valeur propre. Soit donc $f \in E$ et $\lambda > 0$ tels que $VV^*(f) = \lambda f$. Alors $\lambda f'' = f$. Posons $\mu := 1/\sqrt{\lambda}$. On sait que f est de la forme $f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$. Or $f(0) = A = 0$, et $f'(0) = B\mu = \lambda^{-1}\int_0^1 f = \lambda^{-1}\frac{B}{\mu}(1-\cos(\mu))$. Cela prouve que l'on doit avoir $\cos(\mu) = 0$, et donc $\mu = \frac{\pi}{2} + n\pi$, avec $n \in \mathbb{N}$. Donc la plus grande valeur propre correspond au plus petit μ, c'est-à-dire à $\mu = \frac{\pi}{2}$, ou encore $\lambda = \frac{4}{\pi^2}$.

Or, c'est un fait général que pour tout opérateur continu A sur un Hilbert, $\|A\|^2 = \|A^*A\|$. En effet, si x est de norme 1,

$$\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \rangle A^*A(x), x\langle,$$

donc $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$, et l'autre inégalité est triviale. On applique cette propriété à $A = V^*$, et on trouve donc $\|V^*\| = \|V\| = \frac{2}{\pi}$.

⋆

Solution 3. *Espaces L^p, $p \in]0,1[$*

1. Le point essentiel est que si $0 < p < 1$, l'application $x \mapsto x^p$ est concave, donc sous-additive. Ainsi, $d(f,g) \leq \int_0^1 (|f|^p + |g|^p) < +\infty$. D'autre part, cela prouve l'inégalité triangulaire, car $|f-g|^p \leq |f-h|^p + |h-g|^p$.

2.

(a) C'est la régularité de la mesure de Lebesgue, *i.e.* $\varphi :\mapsto \int_0^x |f|^p$ est continue, croissante, vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = \int_0^1 |f|^p$. Il suffit donc de choisir $x_i \in [0,1]$ tel que $\varphi(x_i) = \frac{i}{n}\int_0^1 |f|^p$.

(b) On a bien sûr

$$f = \frac{1}{n}(g_0^n + \cdots + g_{n-1}^n).$$

D'autre part, $d(g_i^n, 0) = \int_0^1 |g_i^n|^p = n^p \cdot \frac{1}{n}\int_0^1 |f|^p \to 0$ uniformément en $0 \leq i \leq n-1$. Pour n assez grand, $\forall i$, $g_i^n \in V$ et par convexité, $f \in V$. Cela achève de prouver que $V = L^p([0,1],\mathbb{R})$.

3. Soit $\ell \in L^p([0,1],\mathbb{R})^*$. Comme $\ell^{-1}(]-1,1[)$ est un voisinage ouvert convexe de 0, c'est donc $L^p([0,1],\mathbb{R})$ tout entier. ℓ est donc uniformément bornée ; par homogénéité, cela entraîne que $\ell = 0$.

⋆

Solution 4. *L'ensemble des opérateurs compacts d'un Hilbert n'est pas complémenté*

1. Si $K(H)$ est complémenté dans $\mathcal{L}(H)$, notons G un supplémentaire topologique, et π la projection (continue) sur G. Alors le noyau de π contient les opérateurs compacts, par définition, donc le théorème donne l'existence d'une projection $P \in \mathcal{L}(H)$ telle que $\pi(P) = 0$. Donc P est un opérateur compact. En particulier, d'après un théorème du cours, $\ker(P - I)$ est de dimension finie ; or c'est $\mathrm{Im}(P)$: c'est contradictoire.

2. Si $i \neq i'$, notons $N \in \mathbb{N}$ le plus petit indice tel que $i_N \neq i'_N$. Alors, à cause de l'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteurs premiers, tout élément de A_i qui comporte p_{i_N} dans sa décomposition ne peut appartenir à $A_{i'}$; or tous les éléments de A_i comportent p_{i_N}, excepté un nombre fini d'entre eux. Cela prouve que $A_i \cap A_{i'}$ est fini.

3. Il faut observer ici que si $i \neq i'$, $P_{A_i} + P_{A_{i'}} = P_{A_i \cup A_{i'}} + P_{A_i \cap A_{i'}}$. Comme $A_i \cap A_{i'}$ est fini, $P_{A_i \cap A_{i'}}$ est une projection sur un espace de dimension finie, donc un opérateur compact, si bien que $T_i + T_{i'} = \Phi(P_{A_i} + P_{A_{i'}}) = \Phi(P_{A_i \cup A_{i'}})$, et donc $\|T_i + T_{i'}\| \leq \|\Phi\|$. De même, on démontre par récurrence que $\forall J \subset I$ fini, $\| \sum_{j \in J} T_j \| \leq \|\Phi\|$.

4. Soient $S_1, \ldots, S_k$ des opérateurs de la famille $\{S_\ell\}$. On a

$$\left| \sum_{j=1}^{k} \langle e_n, S_k(e_m) \rangle \right| = \left| \left\langle e_n, \left(\sum_{j=1}^{k} S_k \right) (e_m) \right\rangle \right| \leq C.$$

Comme c'est vrai pour n'importe quelle partie de $\{S_\ell\}$, cela implique (en raisonnant suivant le signe de chaque terme — ou de la partie réelle et de la partie imaginaire de chaque terme, si H est complexe) que

$$\sum_{j=1}^{k} | \langle e_n, S_k(e_m) \rangle | \leq 4C.$$

En particulier, chaque $L_{n,m,N}$ est fini (de cardinal au plus $4CN + 1$). Donc $\bigcup_{n,m,N} L_{n,m,N}$ est au plus dénombrable. Or si $S \in \{S_\ell\}$ n'est pas dans cette union, alors $\langle e_n, S(e_m) \rangle = 0$ quels que soient $n, m \in \mathbb{N}$, et donc $S = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Cela prouve que $\{S_\ell\}$ est au plus dénombrable.

5. D'après le principe des tiroirs, comme l'ensemble des T_i non nuls vérifie (P), et est donc dénombrable, il existe $i_0 \in I$ tels que $T_{i_0} = 0$. Cela signifie que $P_{A_{i_0}} \in \ker \Phi$, ce qui est le résultat.

$\star$

Solution 5. *Théorème de Milman-Pettis*

1. Dans un espace de Hilbert, en effet, l'identité du parallélogramme dit que $2(\|\frac{x+y}{2}\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $\delta > 0$ tel que $\varepsilon = 2\sqrt{\delta(2-\delta)}$. De la sorte, si $\|\frac{x+y}{2}\|^2 \geq (1-\delta)^2$, et $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ on a $\|x - y\|^2 \leq 4 - 4(1-\delta)^2 = \varepsilon^2$.

2. Considérons $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, et $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$. On a $\|\frac{e_1+e_2}{2}\|_{\ell^1} = 1 \geq 1 - \delta$ pour tout $\delta > 0$. Si $\ell^1(\mathbb{N})$ était uniformément convexe, on aurait $e_1 = e_2$, mais ce n'est pas le cas.

3. On sait que $\|J_E(x)\| = \|x\|$. En effet, $\sup\{|y^*(x)| \mid y^* \in E^*, \|y^*\| \leq 1\} = \|x\|$ (une inégalité est évidente, et l'autre résulte de Hahn-Banach).

4. Il est clair que l'adhérence de $\tilde{S}$ pour la topologie faible-$\star$ est contenue dans B^{**}, puisque B^{**} est fermé pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$. On veut montrer que si x_0^{**} n'est pas dans la fermeture faible-$\star$ de $\tilde{S}$, il n'est pas dans B^{**}. Soit alors un tel x_0^{**}. D'après Hahn-Banach géométrique, il existe une forme linéaire f continue pour la topologie faible-$\star$ sur E^{**}, et telle que $f < 1$ sur $\tilde{S}$ et $f(x_0^{**}) = 1$. Mais alors on a vu qu'il existe $y^* \in E^*$ tel que $f(x^{**}) = x^{**}(y^*)$ et on doit avoir $x^{**}(y^*) < 1$ dès que $\|x^{**}\| = 11$; donc $\|y^*\| < 1$ et comme $x_0^{**}(y^*) = 1$, on en déduit que $\|x_0^{**}\| > 1$.

5. Notons que $J_E(S) = \tilde{S}$ est fermé, car J_E est un plongement isométrique. Donc si x_0^{**} n'appartient pas au fermé $\tilde{S}$, sa distance au fermé est strictement positive : il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x^{**} \in \tilde{S}$, $\|x_0^{**} - x^{**}\| \geq 2\varepsilon$.

6. Comme $\|x^{**}\| = \sup\{x^{**}(y^*) \mid y^* \in E^*, \ \|y^*\| = 1\}$, on trouve tout naturellement $y_0^* \in E^*$ de norme 1, tel que $|x_0^{**}(y_0^*) - 1| \leq \delta$.

7. Si $J_E(y)$, $J_E(z) \in V \cap \tilde{S}$, alors

$$\left\| \frac{y+z}{2} \right\| \geq \left| y_0^* \left(\frac{y+z}{2} \right) \right| \geq 1 - \delta,$$

puisque $|y_0^* \left(\frac{y+z}{2}\right) - 1| \leq \frac{1}{2}|y_0^*(y) - 1| + \frac{1}{2}|y_0^*(z) - 1| \leq \delta$. Grâce à l'uniforme convexité, $\|y - z\| \leq \varepsilon$, et donc $V \cap \tilde{S} \subset J_E(y) + \varepsilon B^{**}$.

8. À présent, la boule B^{**} est fermée pour la topologie faible-$\star$, donc il en est de même pour $J_E(y) + \varepsilon B^{**}$. Comme x^{**} est dans l'adhérence de $V \cap \tilde{B}$, on a que $x_0^{**} \in J_E(y) + \varepsilon B^{**}$. Ceci contredit la question 5. Il est maintenant clair que si $\tilde{S} = S^{**}$, alors J_E est surjective, donc un isomorphisme, et E est réflexif.

$\star$