Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n^{o} 7

Révisions pour le partiel

Séance du 26 mars 2018

Solution 1. *Uniforme intégrabilité*

1. Si $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable, soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ associé. Notons $C = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^1}$. Pour $f \in \mathcal{F}$ donné, et pour tout $M > 0$, on note aussi

$$A_M(f) = \{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq M\}.$$

L'inégalité de Markov nous dit que $M\lambda(A_M(f)) \leq \int_\Omega |f| \leq C$, pour tout $M > 0$, donc pour $M \geq \frac{C}{\delta}$, on a $\lambda(A_M(f)) \leq \delta$ (et c'est vrai pour tout $f \in \mathcal{F}$), ce qui implique que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{A_M} |f| \leq \epsilon.$$

Réciproquement, pour tout $M > 0$, $f \in \mathcal{F}$ et A mesurable,

$$\int_A |f| \leq M\lambda(A) + \int_{\{|f|\geq M\}\cap A} |f|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \leq \varepsilon/2$. Posons $\delta = \varepsilon/(2M)$. Alors, si $\lambda(A) \leq \delta$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f| \leq M\lambda(A) + \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}\cap A} |f| \leq \varepsilon.$$

2. Si une telle fonction g existe, soit $\varepsilon > 0$ et M_0 telle que $t/g(t) \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq M_0$. Alors, pour tout $M \geq M_0$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M\}} |f| \leq \varepsilon \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega g(|f|) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On peut donc conclure grâce à la question précédente.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ est uniformément intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit M_n tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|\geq M_n\}} |f| \leq \frac{1}{2^n}.$$

On peut supposer que la suite $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{x\geq M_n\}} x.$$

Alors $g(x)/x = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N} \mid \ M_n \leq x\} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Enfin, pour tout $f \in \mathcal{F}$, par convergence monotone,

$$\int_\Omega g(|f(x)|)dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f|\geq M_n\}} |f(x)|dx \leq 2,$$

donc $\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_\Omega g(|f(x)|)dx < +\infty$.

⋆

Solution 2. *Théorème de Dunford-Pettis*

1. Soit u une fonction continue, positive, à support compact dans $]-1,1[$, et d'intégrale 1. Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, notons $u_n(x) := nu(nx)$. Alors $\int_{-1}^1 |u_n(x)|dx = \|u\|_{L^1}$, et pour tout f continue (et donc induisant sur L^1 une forme linéaire continue), $\langle f, u_n\rangle = \int_{-1}^1 fu_n \to f(0)$ quand $n\to+\infty$. Or il n'existe pas de fonction $\psi\in L^1(]-1,1[)$ telle que $f(0)=\langle f,\psi\rangle$ pour toute fonction f continue (car sinon, un tel ψ serait d'intégrale 1, mais nulle sur tout intervalle ouvert ne contenant pas 0). Donc $\{u_n\}$ n'admet pas de valeur d'adhérence faible.

2. Si, au lieu de considérer f_n, on considère $f_n^+ := f_n\mathbb{1}_{\{f_n\geq 0\}}$ et $f_n^- := -f_n\mathbb{1}_{\{f_n<0\}}$ pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on obtient toujours bien deux suites bornées de $L^1(\Omega)$, et uniformément intégrables. De plus, si la conclusion est vraie pour les suites de fonctions positives, on peut trouver une sous-suite commune telle que $f_{n_k}^+ \rightharpoonup g^+$ et $f_{n_k}^- \rightharpoonup g^-$, et alors $f_{n_k}\rightharpoonup g^+ - g^-$.

3. $\sup_n \int |f_n - f_n^k| = \sup_n \int_{\{f_n\geq k\}} |f_n| \to 0$ quand $k\to+\infty$, d'après la caractérisation de l'uniforme intégrabilité.

4. Pour k fixé, la suite $\{f_n^k\}_n$ est bornée par k. On peut appliquer le théorème de Banach-Alaoglu sur la boule de rayon k de L^∞ : comme $L^1(\Omega)$ est séparable (cf. exercice 1, TD 4), on peut extraire une sous-suite $\{f^k_{\varphi_k(n)}\}$ qui converge pour la topologhie faible-étoile $\sigma(L^\infty, L^1)$ vers une limite $f^k\in L^\infty$. Comme Ω est borné, on a $L^\infty(\Omega)\subset L^1(\Omega)$, donc $f^k_{\varphi_k(n)}$ converge aussi vers f^k pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$, et bien sûr $f^k\in L^1$.
Pour obtenir ψ, on procède à une extraction diagonale.

5. Observons à présent que f^k est une suite croissante : pour tout $g\geq 0$ continue à support compact, on a $\int_\Omega (f^{k+1}_{\psi(n)} - f^k_{\psi(n)})g \geq 0$ donc en passant à la limite quand $n\to\infty$, on obtient le résultat souhaité. Posons $f := \sup_k f^k$. De plus, d'après un résultat classique sur la convergence faible, $\|f^k\|_{L^1} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f^k_{\psi(n)}\|_{L^1} \leq \sup_n \|f_{\psi(n)}\|_{L^1} < +\infty$. Le théorème de Beppo-Levi dit donc que $f\in L^1$ et que f^k converge dans L^1 vers f.

6. Soit $g\in L^\infty$, et $\varepsilon>0$ fixé. On décompose

$$\left|\int_\Omega (f_{\psi(n)} - f)g\right| \leq \left|\int_\Omega (f_{\psi(n)} - f^k_{\psi(n)})g\right| + \left|\int_\Omega (f^k_{\psi(n)} - f^k)g\right| + \left|\int_\Omega (f^k - f)g\right|.$$

Choisissons $k\in\mathbb{N}$ tel que $\|g\|_{L^\infty}(\|f^k - f\|_{L^1} + \sup_n \|f_n - f_n^k\|_{L^1}) \leq \varepsilon/2$. Puis on choisit alors n tel que $|\int (f^k_{\psi(n)} - f^k)g| \leq \varepsilon/2$.

7. L'ensemble $\mathfrak{X}$ est fermé L^1 fort, car si une suite u_n de points de $\mathfrak{X}$ converge en norme L^1 vers u, alors u est mesurable, et une sous-suite de u_n converge presque partout vers u. On voit facilement que u est, à un ensemble négligeable près, à valeurs dans $\{0,1\}$. On voit aussi que les X_n sont fermés L^1 fort, grâce au théorème de convergence dominée (rappelons que $\{f_n\}$ est une partie bornée de $L^1(\Omega)$).

8. On utilise alors le théorème de Baire sur $\mathfrak{X}$ (qui est complet comme fermé de L^1), puisque par hypothèse, $f_n\rightharpoonup f$, et donc $\mathfrak{X} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Un X_n au moins est donc d'intérieur non vide dans $\mathfrak{X}$: cela signifie qu'il existe $B\subset\Omega$ et $\delta>0$ tel que

$$\lambda(A)\leq\delta \Rightarrow \forall k\geq n,\ \left|\int_F (f_k - f)\right| \leq \varepsilon \text{ pour } F = B\cup A \text{ et } F = B\setminus A.$$

Or on a, pour toute fonction $g\in L^1$, $\int_{B\cup A} g - \int_{B\setminus A} g = \int_A g$. On en déduit que

$$\lambda(A)\leq\delta \Rightarrow \forall k\geq n,\ |\int_A (f_k - f)| \leq 2\varepsilon.$$

Introduisons maintenant A_k^+ et A_k^-, définis comme les sous-ensembles de A pour lesquels $f_k - f \geq 0$ (resp. $f_k - f < 0$). Tous deux sont de mesure inférieure à $\lambda(A)$, et on en déduit que

$$\int_A |f_k - f| = \left| \int_{A_k^+} (f_k - f) \right| + \left| \int_{A_k^-} (f - f_k) \right| \leq 4\varepsilon.$$

Donc la famille $\{f_k - f\}_{k \geq n}$ est uniformément intégrable. Donc $\{f_n - f\}_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi (cela ne change pas par un ajout fini de points). Enfin, $\{f_n\}$ l'est aussi : sinon, il existerait $\varepsilon_0 > 0$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, une fonction g_N appartenant à la suite $\{f_n\}$ et un ensemble A_N tels que $\lambda(A_N) \leq 2^{-N}$, et $\int_{A_N} |g_N| \geq \varepsilon_0$. Or

$$\int_{A_N} |g_N| \leq \int_{A_N} |g_N - f| + \int_\Omega |f| \mathbb{1}_{A_N}.$$

Le premier terme est plus petit que $\varepsilon_0/2$ dès que N est assez grand. Quant au second, il tend aussi vers 0 grâce au théorème de convergence dominée : en effet, par le lemme de Borel-Cantelli, x n'appartient presque sûrement qu'à un nombre fini d'ensembles A_N, donc $|f|\mathbb{1}_{A_N} \to 0$ p.p., d'où la contradiction.

⋆

Solution 3. *Théorème de Krein-Šmulian*

1. Comme $J(X)$ est convexe et fermé dans X^{**} (grâce à la complétude de X), et $\{\psi\}$ convexe compact, on peut trouver, grâce à Hahn-Banach géométrique, une forme linéaire $a \in X^{***}$, et $c \in \mathbb{R}$, tels que $a(\psi) > c$, et $a(y) < c$, $\forall y \in J(X)$. Or $J(X)$ est un espace vectoriel, donc cela oblige $a(y) = 0$. Quitte à diviser a par sa norme, on peut supposer que $\|a\|_{X^{***}} \leq 1$.

2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$W_n := \left(\bigcap_{j=0}^{n} U_n \right) \cap V$$

est un voisinage ouvert faible-étoile de a pour la topologie $\sigma(X^{***}, X^{**})$ sur $B_{X^{***}}$. D'après le lemme de Goldstine, $\tilde{J}(B_{X^*})$ est dense dans $B_{X^{***}}$ pour cette topologie. Donc on peut trouver dans chaque W_n un élément de $\tilde{J}(B_{X^*})$, qui s'écrit $\tilde{\varphi}_{\ell_n}$ pour un certain $\ell_n \in B_{X^*}$. On a déjà $\|\ell_n\|_{X^*} \leq 1$. D'autre part, pour tout $0 \leq j \leq n$, on a $1 > |(a - \tilde{\varphi}_{\ell_n})(\varphi_{x_j})| = |\varphi_{x_j}(\ell_n)| = |\ell_n(x_j)|$. Enfin, $|\psi(\ell_n)| = |\tilde{\varphi}_{\ell_n}(\psi)| \leq |a(\psi)| - |(a - \tilde{\varphi}_{\ell_n})(\psi)| \geq c/2$.

3. Soit $x \in X$, et $\varepsilon > 0$. Grâce à la séparabilité, il existe x_N tel que $\|(x/\varepsilon) - x_N\| \leq 1$. Ainsi, pour $n \geq N$, $|\ell_n(x/\varepsilon - x_N)| \leq 1$, et donc $|\ell_n(x)| \leq 2\varepsilon$. Donc ℓ_n tend vers 0 pour la topologie faible-$*$.

4. Le sens direct est vrai par définition de la topologie faible-$*$ (elle rend continues les évaluations). Réciproquement, supposons que $\psi \notin J(X)$. Alors on peut construire une suite $\{\ell_n\}$ comme à la question précédente. On a alors $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, mais $|\psi(\ell_n)| \geq \frac{c}{2}$, et ne tend donc pas vers $\psi(0) = 0$.

5. L'injection naturelle est donnée par

$$T : \begin{cases} X^* \longrightarrow C_w(K) \\ \ell \longmapsto \ell|_K. \end{cases}$$

En effet, par définition de la topologie faible sur X, ℓ est continue sur K faible. De plus, T est linéaire, et continue, car pour tout $x \in K$, $|T(\ell)(x)| \leq \|\ell\|_{X^*} \|x\|_X$. Or K est fortement borné (par Banach-Steinhaus), donc $\|T(\ell)\|_\infty \leq C\|\ell\|_{X^*}$.

6. Par le théorème de dualité de Riesz, comme K est compact faible, on peut identifier $C_w(K)^*$ à l'ensemble des mesures finies (signées) sur K : pour tout $L \in C_w(K)^*$, il existe une mesure μ telle que $L(f) = \langle \mu, f \rangle = \int_K f(x)\mu(dx)$. Pour montrer que T^* est à valeurs dans $J(X)$, on utilise le critère de la partie I. Fixons $\mu \in C_w(K)^*$, et supposons que $\ell_n \xrightarrow{\star} \ell$ dans X^*. Montrons que $T^*(\mu)(\ell_n) \to T^*(\mu)(\ell)$, ce qui prouvera que $T^*(\mu) \in J(X)$. Par définition de l'adjoint, $T^*(\mu)(\ell_n) = \langle \mu, T(\ell_n) \rangle = \int_K \ell_n(x)\mu(dx)$. Comme X est un Banach (très important !), la suite $\{\ell_n\}$, qui converge faible-$*$, est uniformément bornée en norme, et d'autre part, K est borné fort, donc il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in K$, $|\ell_n(x)| \leq C$. Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui prouve que $T^*(\mu)(\ell_n) \to \int_K \ell(x)\mu(dx) = T^*(\mu)(\ell)$.

7. Par le théorème de Banach-Alaoglu, B est compacte pour la topologie faible-$*$ sur $C_w(K)^*$. On a donc une chaîne d'applications

$$(C_w(K)^*, \sigma(C_w(K)^*, C_w(K))) \xrightarrow{T^*} (J(X), \sigma(X^{**}, X^*)) \xrightarrow{J^{-1}} (X, \sigma(X, X^*)),$$

dont il suffit de vérifier que la composition est continue en 0 (ce sont des applications linéaires). On peut le faire « à la main » : soit $\ell \in X^*$, et $V_\varepsilon = \{x \in X \mid |\ell(x)| \leq \varepsilon\}$. Alors $(J^{-1} \circ T^*)^{-1}(V_\varepsilon)$ contient $\{\mu \in C_w(K)^* \mid |\langle \mu, T\ell \rangle| \leq \varepsilon\}$, qui est bien un voisinage de 0 pour la topologie faible-$*$ sur $C_w(K)^*$. Donc $(J^{-1} \circ T^*)(B)$ est un compact faible, convexe bien sûr (grâce à la linéarité de $J^{-1} \circ T^*$) ; il contient K (car pour tout $x \in K$, $x = J^{-1}T^*(\delta_x)$, le Dirac en x). Donc il contient $\overline{\mathrm{co}}(K)$, qui est de ce fait fermé faible dans un compact faible, donc compact faible. Noter qu'on utilise ici l'équivalence entre fermé fort et fermé faible pour les convexes.

8. Pour lever l'hypothèse de séparabilité sur X, il faut recourir au théorème d'Eberlein-Šmulian : pour montrer que $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est faiblement compact, il suffit de montrer qu'il est séquentiellement faiblement compact, et donc on se restreint à une suite de points, et on considère l'adhérence de l'espace qu'ils engendrent, qui est bien séparable.

$\star$