Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 7

Révisions pour le partiel

Séance du 18 mars 2019

Solution 1. *Échauffement : vrai ou faux*

1. OUI. Soit F un sous-espace de dimension finie d'un Banach E, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F convergeant vers x dans E. Alors comme $(x_n)_n$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeante dans F, donc $x \in F$.

2. NON. Le noyau d'une forme linéaire non continue est un hyperplan qui n'est pas fermé.

3. NON sans supposer f nulle ou sans hypothèse supplémentaire sur E : par exemple, pour $E = L^p([0,1])$, $p < 1$, une droite de E est fermée non dense mais le dual de E est réduit à $\{0\}$. Si on suppose que E est un espace vectoriel topologique localement convexe, alors en considérant $x_0 \in E \setminus F$, le théorème de séparation de Hahn-Banach permet de construire une forme linéaire continue non nulle f telle que $f(x) = 0$ pour $x \in F$.

4. OUI. C'est même le cas pour tout convexe C. En effet $\bar{C} \subset \bar{C}_w$ car la topologie faible a moins de fermés que la topologie forte. L'inclusion inverse résulte de ce que si $y \notin \bar{C}$, il existe une forme linéaire séparant y de $\bar{C}$ (théorème de Hahn-Banach) et donc $y \notin \bar{C}_w$.

5. OUI. Si l'ensemble $\{x \mid \ell(x) > 0\}$ est ouvert, alors l'ensemble $\{x \mid \ell(x) < 0\}$ aussi (si $\ell(x_0) < 0$, soit $V \subset \{x \mid \ell(x) > 0\}$ un voisinage de $-x_0$, alors $-V \subset \{x \mid \ell(x) < 0\}$ est un voisinage de x_0). Par conséquent, le complémentaire de leur union, i.e. le noyau de ℓ, est fermé.

6. OUI. En effet, on considère les évaluations $\varphi_n : \ell \in E^* \mapsto \ell(x_n)$. Si pour tout $\ell \in E^*$, $(\ell(x_n))_n = (\varphi_n(\ell))_n$ est bornée, alors par le théorème de Banach-Steinhaus, $(\varphi_n)_n$ est bornée dans E^{**}, mais comme $\|\varphi_n\|_{E^{**}} = \|x_n\|_E$, la suite $(x_n)_n$ est bornée.

7. NON. Par exemple, dans $L^2(\mathbb{R})$, on considère $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non identiquement nulle, la suite $u_n := \varphi(\cdot - n)$ converge faiblement vers 0 mais ne peut pas converger fortement (sinon elle convergerait fortement vers 0).

8. OUI. Soit $(x_n)_n$ est une suite bornée d'un Banach réflexif E. On pose $F = \overline{\mathrm{Vect}(x_n)_n}$: c'est un convexe fermé (fort) de E donc il est fermé dans E pour la topologie faible. Par conséquent, comme E est réflexif, la boule unité fermée B_E est compacte pour la topologie faible (Kakutani), donc $B_F = B_E \cap F$ aussi, donc F est réflexif (Kakutani). De plus, par construction, F est séparable. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Alaoglu séquentiel à F : il existe une sous-suite qui converge pour la topologie faible $*$, qui coïncide avec la topologie faible dans F puisque F est réflexif. On voit alors que cette suite converge faiblement dans E.

9. NON. C'est une conséquence du lemme de Baire avec $E = \bigcup E_k$.

10. NON. Les limites inductives ne peuvent pas être métrisables, mais sont localement convexes.

⋆

Solution 2. *Formule des sauts sur un intervalle*

Soit $\phi \in \mathcal{D}(I)$. On note $I =]a_0, a_{N+1}[$ (avec éventuellement $a_0 = -\infty$ et $a_{N+1} = +\infty$), et on calcule

$$\begin{aligned}\langle T_f', \phi\rangle &= -\int_I f\phi' \\ &= -\sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\phi' \\ &= \sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'\phi - \sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1}-0) - (f\phi)(a_i+0)] \\ &= \langle T_{f'_{\text{reg}}}, \phi\rangle - \sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1}-0) - (f\phi)(a_i+0)],\end{aligned}$$

où l'intégration par partie s'est faite sur des intervalles du type $[a_i + \varepsilon, a_{i+1} - \varepsilon]$, avant de faire tendre ε vers 0.

En utilisant le fait que ϕ est à support compact, on peut réorganiser la somme :

$$\begin{aligned}-\sum_{i=0}^{N} [(f\phi)(a_{i+1}-0) - (f\phi)(a_i+0)] &= -\sum_{i=1}^{N} [(f\phi)(a_i-0) - (f\phi)(a_i+0)] \\ &= \sum_{i=1}^{N} (f(a_i+0) - f(a_i-0))\phi(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (f(a_i+0) - f(a_i-0))\langle \delta_{a_i}, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve.

⋆

Solution 3. *Fonctions de L^1 génériques*

1. Si $f \in L^p([0,1])$, alors l'inégalité de Hölder assure que

$$\int_0^1 |f| \le \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 1\right)^{1-\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Cela prouve que L^p est inclus dans $X = L^1$.

2. Montrons que E_N est fermé. Cela provient du fait que, si $I \subset [0,1]$ est un borélien, l'application $f \mapsto \int_I |f|$ est continue sur X, et donc que l'image réciproque du segment $[0, N\lambda(I)^{1/N}]$ par cette application est un fermé. On voit que E_N est l'intersection de ces fermés quand I parcourt l'ensemble des boréliens de $[0,1]$, donc est fermé.

Soit à présent $f \in L^p([0,1])$ pour un certain $1 < p \le \infty$, et montrons qu'il existe un certain E_N qui le contienne. Soit $I \subset [0,1]$ un borélien. On a, toujours par Hölder,

$$\int_I |f| \le \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I 1\right)^{1-\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^p} \lambda(I)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Soit à présent $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f\|_{L^p} \le N$ et $1 - \frac{1}{p} \ge \frac{1}{N}$ et donc

$$\lambda(I)^{1-\frac{1}{p}} \le \lambda(I)^{\frac{1}{N}}$$

pour tout borélien I. Cela prouve que $f \in E_N$.

3. Observons que pour tout $x \in]0,1]$,

$$\int_0^x |g_N(t)| dt = \int_0^x t^{\frac{1}{2N}-1} dt = 2N x^{\frac{1}{2N}} .$$

En particulier, $g_N \in X$, donc $f + \varepsilon g_N$ aussi. Supposons maintenant que $f + \varepsilon g_N \in E_N$. On aurait alors, en écrivant $g_N = \varepsilon^{-1}((f+\varepsilon g_N) - f)$,

$$\int_0^x |g_N(t)| dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^x |f(t)| dt + \int_0^x |f(t) + \varepsilon g_N(t)| dt \right) \leq \frac{2N x^{\frac{1}{N}}}{\varepsilon} .$$

Par conséquent, on aboutit à

$$x^{\frac{1}{2N}} \geq \varepsilon, \quad \forall x \in]0,1] ,$$

ce qui est absurde, lorsque $x \to 0$.

On peut donc appliquer le théorème de Baire : $\bigcup_{N \geq 1} E_N$ est une union de fermés d'intérieur vide de X, elle est donc d'intérieur vide. Donc l'union des L^p, $p > 1$ est contenu dans un ensemble résiduel de L^1, ce qu'il fallait démontrer.

⋆

Solution 4. *Distributions homogènes*

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a

$$|\det DM_\lambda^{-1}| = |\det DM_{\lambda^{-1}}| = \lambda^{-d}$$

et donc

$$\langle T \circ M_\lambda, \varphi \rangle = \lambda^{-d} \big\langle T, \varphi \circ M_{\lambda^{-1}} \big\rangle .$$

2. (a) Il suffit de dériver par rapport à λ la relation

$$f(\lambda x) = \lambda^\beta f(x)$$

puis choisir $\lambda = 1$.

(b) On a

$$\sum_{j=1}^d \partial_j \big(x^j f(x) \big) = x \cdot \nabla f(x) + d\, f(x)$$

et le résultat suit.

(c) On a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\lambda > 0$

$$\Big\langle T, \varphi\big(\frac{\cdot}{\lambda}\big) \Big\rangle = \lambda^{d+\beta} \langle T, \varphi \rangle .$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation sous le crochet on considère une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$ à valeurs dans $[0,1]$, égale à 1 au voisinage de 1. Soit alors la fonction

$$\psi(x, \lambda) := \varphi\big(\frac{x}{\lambda}\big) \theta(\lambda) .$$

Le théorème de dérivation sous le crochet implique que

$$
\begin{aligned}
\langle \sum_{j=1}^{d} \partial_j (x^j T), \varphi \rangle &= \langle T, -x \cdot \nabla \varphi \rangle \\
&= \langle T, \partial_\lambda \varphi(\cdot/\lambda)_{|\lambda=1} \rangle \\
&= \langle T, \partial_\lambda \big(\varphi(\cdot/\lambda)\theta(\lambda)\big)_{|\lambda=1} \rangle \\
&= \partial_\lambda \langle T, \psi(\cdot, \lambda) \rangle_{|\lambda=1} \\
&= \partial_\lambda \big(\lambda^{d+\beta}\theta(\lambda)\big)_{|\lambda=1} \langle T, \varphi \rangle \\
&= (d+\beta) \langle T, \varphi \rangle \, .
\end{aligned}
$$

3. (a) On écrit

$$
f(x) = f\Big(|x| \frac{x}{|x|}\Big) = |x|^\beta f\Big(\frac{x}{|x|}\Big) \cdot
$$

En particulier pour tout R on a

$$
\int_{B(0,R)} |f(x)| \, dx = \int_0^R r^{\beta+d-1} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)| \, d\sigma(y)
$$

donc si $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)| \, d\sigma(y) = 0$ alors $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$.

(b) La restriction de la fonction continue f à la sphère unité (qui est un compact de $\mathbb{R}^d$) est bornée donc

$$
|f(x)| \leq \max_{|y|=1} |f(y)| \, |x|^\beta \, .
$$

Par ailleurs

$$
\int_{B(0,R)} |f(x)| \, dx = \int_0^R r^{\beta+d-1} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)| \, d\sigma(y) \, .
$$

Si

$$
\int_{B(0,R)} |f(x)| \, dx < \infty
$$

on a donc

$$
\int_0^R r^{\beta+d-1} dr < \infty
$$

ce qui équivaut à $\beta > -d$ (sinon $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(y)| \, d\sigma(y) = 0$ et donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$).

4. On a

$$
\begin{aligned}
\langle \delta_0 \circ M_\lambda, \varphi \rangle &= \lambda^{-d} \big\langle \delta_0, \varphi \circ M_{\lambda^{-1}} \big\rangle \\
&= \lambda^{-d} \varphi(0) \\
&= \lambda^{-d} \langle \delta_0, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

donc δ_0 est homogène sur $\mathbb{R}^d$ de degré $-d$.

5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ homogène de degré β. Montrons que $\partial_j T$ est homogène de degré $\beta - 1$. Le cas général s'obtiendra par récurrence immédiate. On a

$$
\begin{aligned}
\langle (\partial_j T) \circ M_\lambda, \varphi \rangle &= -\lambda^{-d} \langle T, \partial_j (\varphi \circ M_{\lambda^{-1}}) \rangle \\
&= -\lambda^{-d-1} \langle T, (\partial_j \varphi) \circ M_{\lambda^{-1}} \rangle \\
&= -\lambda^{-1} \langle T \circ M_\lambda, \partial_j \varphi \rangle \\
&= -\lambda^{-1} \langle \lambda^\beta T, \partial_j \varphi \rangle \\
&= \lambda^{\beta-1} \langle \partial_j (T), \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

et le résultat suit.

6. (a) On vérifie sans difficulté que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\,, \quad \langle \dot{T}, \phi \rangle = \langle T, \chi R_\beta \phi \rangle$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}^d$ puisque T est une distribution sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, et par la formule de Leibniz pour tout multi-indice α il existe une constante C dépendant de α et β telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha(\chi R_\beta \phi)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\gamma\leq\alpha} |\partial^\gamma \phi(x)|\,.$$

(b) On a pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned}
\langle T, \chi R_\beta \phi \rangle &= \left\langle T, \chi \int_0^\infty \phi(r\cdot) r^{\beta+d-1}\, dr \right\rangle \\
&= \int_0^\infty \left\langle r^\beta T, \chi \phi(r\cdot) r^{d-1} \right\rangle dr \\
&= \int_0^\infty \left\langle T \circ M_r, \chi \phi(r\cdot) r^{d-1} \right\rangle dr \\
&= \int_0^\infty \left\langle T, \chi(\cdot/r)\phi \right\rangle \frac{dr}{r} \\
&= \left\langle T, \phi \int_0^\infty \chi(\cdot/r) \frac{dr}{r} \right\rangle \\
&= \langle T, \phi \rangle\,.
\end{aligned}$$

On a donc bien $\dot{T}_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} = T$.

(c) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et soit $\lambda > 0$ on a

$$\begin{aligned}
\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \varphi \rangle &= \lambda^{-d} \langle \dot{T}, \varphi(\cdot/\lambda) \rangle \\
&= \lambda^{-d} \langle T, \chi R_\beta \varphi(\cdot/\lambda) \rangle\,.
\end{aligned}$$

Mais

$$R_\beta \varphi(x/\lambda) = \int_0^\infty \varphi(rx/\lambda) r^{\beta+d} \frac{dr}{r}$$

et en posant $sx = rx/\lambda$ on voit que

$$R_\beta \varphi(x/\lambda) = \lambda^{\beta+d} R_\beta \varphi(x)$$

donc

$$\langle \dot{T} \circ M_\lambda, \varphi \rangle = \langle T, \lambda^\beta \chi R_\beta \varphi \rangle = \lambda^\beta \langle \dot{T}, \varphi \rangle$$

et donc $\dot{T}$ est homogène de degré β. On a donc construit une distribution homogène de degré β qui prolonge T à $\mathbb{R}^d$.

⋆

Solution 5. *Théorème de Krein-Šmulian*

1. Comme $J(X)$ est convexe et fermé dans X^{**} (grâce à la complétude de X), et $\{\psi\}$ convexe compact, on peut trouver, grâce à Hahn-Banach géométrique, une forme linéaire $a \in X^{***}$, et $c \in \mathbb{R}$, tels que $a(\psi) > c$, et $a(y) < c$, $\forall y \in J(X)$. Or $J(X)$ est un espace vectoriel, donc cela oblige $a(y) = 0$. Quitte à diviser a par sa norme, on peut supposer que $\|a\|_{X^{***}} \leq 1$.

2. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble

$$W_n := \left(\bigcap_{j=0}^{n} U_n \right) \cap V$$

est un voisinage ouvert faible-étoile de a pour la topologie $\sigma(X^{***}, X^{**})$ sur $B_{X^{***}}$. D'après le lemme de Goldstine, $\tilde{J}(B_{X^*})$ est dense dans $B_{X^{***}}$ pour cette topologie. Donc on peut trouver dans chaque W_n un élément de $\tilde{J}(B_{X^*})$, qui s'écrit $\tilde{\varphi}_{\ell_n}$ pour un certain $\ell_n \in B_{X^*}$. On a déjà $\|\ell_n\|_{X^*} \leq 1$. D'autre part, pour tout $0 \leq j \leq n$, on a $1 > |(a - \tilde{\varphi}_{\ell_n})(\varphi_{x_j})| = |\varphi_{x_j}(\ell_n)| = |\ell_n(x_j)|$. Enfin, $|\psi(\ell_n)| = |\tilde{\varphi}_{\ell_n}(\psi)| \geq |a(\psi)| - |(a - \tilde{\varphi}_{\ell_n})(\psi)| \geq c/2$.

3. Soit $x \in X$, et $\varepsilon > 0$. Grâce à la séparabilité, il existe x_N tel que $\|(x/\varepsilon) - x_N\| \leq 1$. Ainsi, pour $n \geq N$, $|\ell_n(x/\varepsilon - x_N)| \leq 1$, et donc $|\ell_n(x)| \leq 2\varepsilon$. Donc ℓ_n tend vers 0 pour la topologie faible-$*$.

4. Le sens direct est vrai par définition de la topologie faible-$*$ (elle rend continues les évaluations). Réciproquement, supposons que $\psi \notin J(X)$. Alors on peut construire une suite $\{\ell_n\}$ comme à la question précédente. On a alors $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, mais $|\psi(\ell_n)| \geq \frac{c}{2}$, et ne tend donc pas vers $\psi(0) = 0$.

5. L'injection naturelle est donnée par

$$T : \begin{cases} X^* \longrightarrow C_w(K) \\ \quad \ell \longmapsto \ell|_K \,. \end{cases}$$

En effet, par définition de la topologie faible sur X, ℓ est continue sur K faible. De plus, T est linéaire, et continue, car pour tout $x \in K$, $|T(\ell)(x)| \leq \|\ell\|_{X^*}\|x\|_X$. Or K est fortement borné (par Banach-Steinhaus), donc $\|T(\ell)\|_\infty \leq C\|\ell\|_{X^*}$.

6. Par le théorème de dualité de Riesz, comme K est compact faible, on peut identifier $C_w(K)^*$ à l'ensemble des mesures finies (signées) sur K : pour tout $L \in C_w(K)^*$, il existe une mesure μ telle que $L(f) = \langle \mu, f \rangle = \int_K f(x)\mu(dx)$. Pour montrer que T^* est à valeurs dans $J(X)$, on utilise le critère de la partie I. Fixons $\mu \in C_w(K)^*$, et supposons que $\ell_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \ell$ dans X^*. Montrons que $T^*(\mu)(\ell_n) \to T^*(\mu)(\ell)$, ce qui prouvera que $T^*(\mu) \in J(X)$. Par définition de l'adjoint, $T^*(\mu)(\ell_n) = \langle \mu, T(\ell_n) \rangle = \int_K \ell_n(x)\mu(dx)$. Comme X est un Banach (très important !), la suite $\{\ell_n\}$, qui converge faible-$*$, est uniformément bornée en norme, et d'autre part, K est borné fort, donc il existe $C \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in K$, $|\ell_n(x)| \leq C$. Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui prouve que $T^*(\mu)(\ell_n) \to \int_K \ell(x)\mu(dx) = T^*(\mu)(\ell)$.

7. Par le théorème de Banach-Alaoglu, B est compacte pour la topologie faible-$*$ sur $C_w(K)^*$. On a donc une chaîne d'applications

$$(C_w(K)^*, \sigma(C_w(K)^*, C_w(K))) \xrightarrow{T^*} (J(X), \sigma(X^{**}, X^*)) \xrightarrow{J^{-1}} (X, \sigma(X, X^*)),$$

dont il suffit de vérifier que la composition est continue en 0 (ce sont des applications linéaires). On peut le faire « à la main » : soit $\ell \in X^*$, et $V_\varepsilon = \{x \in X \mid |\ell(x)| \leq \varepsilon\}$. Alors $(J^{-1} \circ T^*)^{-1}(V_\varepsilon)$ contient $\{\mu \in C_w(K)^* \mid |\langle \mu, T\ell \rangle| \leq \varepsilon\}$, qui est bien un voisinage de 0 pour la topologie faible-$*$ sur $C_w(K)^*$. Donc $(J^{-1} \circ T^*)(B)$ est un compact faible, convexe bien sûr (grâce à la linéarité de $J^{-1} \circ T^*$) ; il contient K (car pour tout $x \in K$, $x = J^{-1}T^*(\delta_x)$, le Dirac en x). Donc il contient $\overline{\text{co}}(K)$, qui est de ce fait fermé faible dans un compact faible, donc compact faible. Noter qu'on utilise ici l'équivalence entre fermé fort et fermé faible pour les convexes.

8. Pour lever l'hypothèse de séparabilité sur X, il faut recourir au théorème d'Eberlein-Šmulian : pour montrer que $\overline{\text{co}}(K)$ est faiblement compact, il suffit de montrer qu'il est séquentiellement faiblement compact, et donc on se restreint à une suite de points, et on considère l'adhérence de l'espace qu'ils engendrent, qui est bien séparable.

$\star$