Correction du Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Autour du Laplacien

Séance du 11 avril 2014

Solution 1. *Préliminaires*

1. L'égalité est vraie pour $u \in \mathcal{C}^1$. On approche ensuite $u \in H^1(\Omega)$ par des fonctions C^1 et on montre qu'il y a convergence des deux côtés de l'égalité.

2. On approche la fonction $(x)_+$ par des fonctions C^1 et on conclue de même en montrant la convergence des deux côté de l'égalité.

⋆

Solution 2. *Régularité elliptique*

1. Si u est solution faible, pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int \nabla u.\nabla v + \int uv = \int fv.$$

On applique cette égalité avec $v = D_{-h}D_h u$, et après changement de variable et intégration par partie on obtient

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}\|D_{-h}D_h u\|_{L^2}.$$

Or pour tout $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ on a $\|D_h v\|_{L^2} \leq C\|\nabla v\|_{L^2}$. En effet

$$|\tau_h v(x) - v(x)| \leq |\int_0^1 h.\nabla v(x+th)dt|,$$

donc

$$\int |\tau_h v(x) - v(x)|^2 dx \leq |h|^2 \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 |\nabla v(x+th)|^2 \leq |h|^2\|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

2. On peut supposer $h = \epsilon e_i$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. On a

$$\int (D_h \partial_j u)\phi = \int \partial_j u D_{-h}\phi \longrightarrow \int \partial_j u \partial_i \phi$$

quand $\epsilon \longrightarrow 0$. On a donc, en utilisant la question précédente

$$|\int \phi \partial_i \partial_j u| \leq C\|\phi|_{L^2}$$

donc $\partial_i\partial_j u \in L^2$.

3. Le raisonnement précédent nous dit que $\partial_i\partial_j u \in L^2$ si on n'a pas $i = j = 1$. Mais comme

$$\partial_1^2 u = \Delta u - \sum_{j=2}^n \partial_j^2 u,$$

on peut conclure.

$\star$

Solution 3. *Première valeur propre du laplacien*

1. Soit $f, g \in L^2$, et $u = (-\Delta)^{-1} f$. Par définition,

$$((-\Delta)^{-1} f, g) = (u, (-\Delta((-\Delta)^{-1} g)) = (-\Delta u, (-\Delta)^{-1} g) = (f, (-\Delta)^{-1} g),$$

donc $(-\Delta)^{-1}$ est auto-adjoint. De plus comme $(-\Delta)^{-1}(B_{L^2}(0,1)) \subset B_{H_0^1}(0, C)$, c'est un opérateur compact. Enfin,

$$((-\Delta)^{-1} f, f) = (u, (-\Delta u)) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq 0,$$

donc c'est un opérateur positif.

On sait donc qu'il existe une base de vecteurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint $(-\Delta)^{-1}$ sur $L^2(\Omega)$. Soit $(e_n)_n$ cette base et $(\mu_n)_n$ la suite décroissante de valeurs propres associées. Celles-ci sont toutes strictement positives par positivité de l'opérateur et tendent vers 0 (voir Thm 4.7 du cours). On conclut en posant $\lambda_n = 1/\mu_n$.

2. Tout d'abord, comme $-\Delta e_n = \lambda e_n$, on voit que

$$\|\nabla e_n\|_{L^2}^2 = \lambda_n \|e_n\|_{L^2}^2 = \lambda_n.$$

D'autre part,

$$\int \nabla e_n \nabla e_m = -\int \Delta e_n e_m = \lambda_n \int e_n e_m = \lambda_n \delta_{n,m},$$

donc e_n est une base orthogonale pour $H_0^1(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1$. $u = \sum_n \alpha_n e_n$. Alors

$$\|u\|_{L^2}^2 = \sum \alpha_n^2, \quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum \lambda_n \alpha_n^2.$$

Comme λ_n est une suite croissante, on en déduit que

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \lambda_1 \|u\|_{L^2}^2.$$

avec inégalité stricte si u n'est pas dans l'espace propre associé à λ_1.

3. Par l'exercice 3 du Td n° 8, $|f| \in H_0^1$, $\nabla |f| = (\mathbb{1}_{f>0} - \mathbb{1}_{f<0}) \nabla f$. En particulier, $\||f|\|_{L^2} = 1$ et $\|\nabla |f|\|_{L^2} = \|\nabla f\|_{L^2}$. Ainsi, $|f|$ réalise également l'optimum dans l'inégalité de Poincaré, ce qui entraine par ce qui précède que $|f| \in E_{\lambda_1}$.

4. Soit $f \in E_{\lambda_1}$, alors comme $-\Delta |f| = \lambda_1 |f| \geq 0$, $|f|$ est sous harmonique (et C^∞, par régularité elliptique). On a donc que pour tout point $x \in \partial\Omega$ pour $\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\frac{1}{|B(x,\varepsilon)|} \int_{B(x,\varepsilon)} |f|(y) dy \leq |f|(x).$$

(Rappel : étant donnée $g \in C^\infty$, en utilisant le fait que $\nabla |x|^2 = 2x$ et $\Delta |x|^2 = 2d$, on a (au point 0) :

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(0,r)} g(x) dx &= \frac{1}{2d} \int\limits_{B(0,r)} g(x) \Delta(|x|^2 - r^2) dx = \frac{1}{n} \int\limits_{\partial B(0,r)} g r d\sigma - \frac{1}{d} \int\limits_{B(0,r)} \nabla g \cdot x dx \\ &= \frac{r}{d} \int\limits_{\partial B(0,r)} g d\sigma - \frac{1}{d} \int\limits_{\partial B(0,r)} \frac{\partial g}{\partial r} (|x|^2 - r^2) + \frac{1}{d} \int \Delta g (|x|^2 - r^2).\end{aligned}$$

Le terme du milieu vaut 0 car on est sur le bord. Si $\Delta g \leq 0$, le dernier est négatif, et

$$\int\limits_{B(0,r)} g(x)dx - \frac{r}{d} \int\limits_{\partial B(0,r)} gd\sigma \leq 0.$$

On note $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} g(x)dx$. Comme $|B(0,r)| = r^n |B(0,1)|$, on a $F'(r) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{\partial B(0,r)} gd\sigma - \frac{n}{r|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} f(x)dx$, et donc $F'(r) \leq 0$. F est C^1, et $F(0) = g(0)$, d'où l'on déduit que $F(r) \leq g(0)$. Ce calcul peut être en tout point d'un ouvert sur lequel $\Delta g \leq 0$, d'où l'inégalité mentionnée.)

Supposons que f s'annule en x, alors f s'annule sur $B(x, \varepsilon)$. Par connexité de Ω, $f = 0$.

Si $e, f \in E_{\lambda_1}$, soit $x \in \Omega$ tel que $e(x) \neq 0$. Il existe λ tel que $f(x) - \lambda e(x) = 0$. Par ce qui précède, vu que $f - \lambda e \in E_{\lambda_1}$, $f - \lambda e = 0$. Ainsi $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

5. Par ce qui précède, $|e_1| \in E_{\lambda_1}$ donc $|e_1| = \lambda e_1$ ($|\lambda| = 1$) et donc que e_1 est de signe constant (presque partout).

Si $\Omega = B(0,1)$, pour toute rotation R, Re_1 vérifie également $-\Delta Re_1 = \lambda_1 Re_1$ donc il existe λ_R tel que $Re_1 = \lambda_R e_1$. On a bien sûr que $|\lambda_R| = 1$ donc $\lambda_R = \pm 1$ (e_1 prend des valeurs réelles). Comme (pour $d \geq 2$), SO_d est connexe et que $R \mapsto \lambda_R$ est continue, $\lambda_R = \text{cste} = 1$. Ainsi, $e_1 = Re_1$ et e_1 est à symétrie sphérique.

⋆

Solution 4. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

1. Par définition, $(T^* f_p | e_n) = (f_p | Te_n)$, donc $\|T^* f_p\|^2 = \sum_n |(f_p | Te_n)|^2$. Ainsi,

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_p \sum_n |(f_p | Te_n)|^2 = \sum_n \sum_p |(f_p | Te_n)|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2,$$

car (f_p) est une base hilbertienne de G (tous les termes son positifs, ce qui autorise é faire les calculs). Étant donné une autre base hilbertienne $(\tilde{e}_n)$ de H, on a également que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 = \sum_n \|T^* f_p\|^2$, ce qui entraine que $\sum_n \|T\tilde{e}_n\|^2 < \infty$ et l'égalité demandée.

2. Soit u_n une suite bornée de H. Quitte à extraire, on peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$ dans H-faible. On note $u_n = \sum_m a_{n,m} e_m$. Par convergence faible, on a que pour tout m, $a_{n,m} \to a_m$ quand $n \to \infty$, et que $u = \sum_m a_m e_m$. Comme la suite u_n, donc $u_n - u$, est bornée, il existe C tel que pour tout n,

$$\sum_m |a_{nm} - a_m|^2 \leq C.$$

Par continuité de T, $Tu_n = \sum_m a_{n,m} Te_m$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que $\sum_{m \geq M} \|Te_m\|^2 \leq \varepsilon / C$, et N tel que pour $n \geq M$,

$$\sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu\|^2 &= \left\| \sum_m (a_{n,m} - a_m) Te_m \right\|^2 \\
&\leq \left| \sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 + \left| \sum_{m\geq M} |a_{n,m} - a_m| \|Te_m\| \right|^2 \\
&\leq \sum_{m<M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m<M} \|Te_m\|^2 + \sum_{m\geq M} |a_{n,m} - a_m|^2 \sum_{m\geq M} \|Te_m\|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|T\|_{HS}^2} \|T\|_{HS}^2 + C\frac{\varepsilon}{C} \leq 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Donc $Tu_n \to Tu$ dans H fort. T est donc compact.

Réciproquement il existe des opérateurs T compacts mais qui ne sont pas de Hilbert-Schmidt : par exemple la multiplication M_a avec $a_n = \frac{1}{1+\ln n}$ $(n \geq 1)$.

3. Vérifier en prenant des produits scalaires avec e_n

4. Soit T un opérateur de Hilbert-Schmidt, on pose $Te_n = \sum_m a_{n,m} e_m$ et

$$K(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} e_n(x) e_m(y).$$

Alors $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ car T est de Hilbert-Schmidt ($\|K\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} a_{nm}^2 = \|T\|_{HS}^2 < \infty$). Par construction, T_K vérifie que pour tout p, q, $(T_K e_p | e_q) = a_{p,q}$ et donc $T_K e_p = Te_p$. T_K est continue sur $L^2(\Omega)$ et coincide avec T sur $\mathrm{Vect}(e_n)$ qui est dense, donc est égal à T.

Supposons que $Tf = \int K_1 f = \int K_2 f$. Alors l'opérateur é associé à $K_1 - K_2$ est nul donc $0 = \|T_{K_1-K_2}\|_{L^2} = \|K_1 - K_2\|_{L^2}$ et $K_1 = K_2$.

⋆