Correction du Td n° 8 d'Analyse fonctionnelle

Distributions

Séance du 2 avril 2015

Solution 1. *Distribution dont le support est un point*

1. Par construction, $\mathrm{Supp}(1-\psi_r) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,r/2)$. Soit alors $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a encore $\mathrm{Supp}(1-\psi_r)\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,r/2)$ et donc par définition,

$$(u,(1-\psi_r)\phi) = 0 = (u,\phi) - (\psi_r u, \phi).$$

D'où le résultat.

2. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage K tel que si $|\alpha| = m$:

$$\forall x \in K, \quad |(D^\alpha \phi)(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrons par récurrence décroissante sur $|\alpha|$ que :

$$\forall \alpha, |\alpha| \leq m, \ \forall x \in K, \quad |(D^\alpha \phi)(x)| \leq \varepsilon n^{m-|\alpha|}|x|^{m-|\alpha|}.$$

Pour $|\alpha| = m$, c'est ce qui précède. On suppose que c'est démontré pour $|\alpha| = k+1$. Soit β de longueur k. Alors :

$$\nabla(D^\beta \phi) = (\partial_{x_1} D^\beta \phi, \ldots, \partial_{x_n} D^\beta \phi).$$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$|\nabla(D^\beta \phi)|(x) \leq n \cdot (\varepsilon n^{m-|\alpha|}|x|^{N-|\alpha|}) \leq \varepsilon n^{m-|\beta|}|x|^{m-|\alpha|}.$$

On applique alors le théorème des accroissement finis, avec $D^\beta(\phi)(0) = 0$, ce qui achève la récurrence.

On calcule maintenant par la formule de Leibniz :

$$D^\alpha(\psi_r \phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^\beta \phi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|}.$$

Soit r assez petit de sorte que $B(0,r) \subset K$. Alors $\mathrm{Supp}(\psi_r \phi) \subset B(0,r) \subset K$.

Or pour $x \in B(0,r) \subset K$, et $|\alpha| \leq m$,

$$|D^\alpha(\psi_r \phi)(x)| \leq C(n,m)\varepsilon \|\psi\|_{|\alpha|}\|\phi\|_{|\alpha|} r^{m-|\alpha|}.$$

Cette majoration est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Finalement, en sommant pour tous les multi-indices de longueur inférieure à m, on obtient :

$$\|\psi_r \phi\|_m \leq C(n,m)\varepsilon \|\psi\|_m \|\phi\|_m.$$

(Pourvu que $r \leq 1$). D'où le résultat.

3. Comme u est d'ordre m, il existe C tel que $|(u,\phi)| \leq C\|\phi\|_m$. Maintenant :

$$|(u,\phi)| = |(u,\psi_r \phi)| \leq C\|\psi_r \phi\|_m \to 0 \text{ quand } r \to 0.$$

Donc $(u,\phi)=0$.

4. On a montré que $\cap_{k=0}^m \operatorname{Ker}\delta_0^{(k)} \subset \operatorname{Ker} u$. Par le lemme des noyaux, on en déduit que $u\in \operatorname{Vect}(\delta_0^{(k)}, k\in [\![0,m]\!])$, ce qui est le résultat demandé.

$\star$

Solution 2. *Support et ordre*

1. Soit $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x)=\phi(0)+\phi'(0)x+\psi(x)x^2$. Alors le terme d'ordre n vaut :

$$n\phi(0)+\phi'(0)\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}+\sum_{i=1}^n\frac{\psi(1/i)}{i^2}-n\phi(0)-\phi'(0)\log n.$$

il est bien connu que que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}-\log n\to\gamma$ et la série résiduelle est convergente car ψ est bornée sur $[0,1]$: $u(\phi)$ est bien défini. Enfin, comme on a $\|\psi\|_{L^\infty([0,1])}\le C\|\phi''\|_{L^\infty}$ (formule de Taylor avec reste intégral), on en déduit que $|u(\phi)|\le C\|\phi''\|_{L^\infty}$ et u est d'ordre au plus 2.

1. Soit $K=\{0\}\cup\bigcup_{i=1}^\infty\{1/i\}$. Bien sûr, $S\subset K$ car si $x\notin K$, il existe un voisinage V de x ne rencontrant pas K, et toute fonction test à support dans V s'annule contre T. D'autre part, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, en choisissant une fonction test ayant son support dans $]1/j-\varepsilon,1/j+\varepsilon[$, on voit que $1/j\in S$. S est un support, donc est fermé et $0\in S$. Finalement, $S=K$.

2. On voit que $u(\phi_k)\sim\sqrt{k}$, mais comme $\partial^\alpha\phi_k(1/j)=0$ si $\alpha\ge 1$,

$$\sum_{i=0}^p\sup_{x\in S}|\partial_x^i\phi_k(x)|\le 1/\sqrt{k}.$$

D'où le résultat.

3. Si u était d'ordre 1, on aurait une relation du type :

$$|u(\varphi)|\le C(\|\varphi\|_{L^\infty}+\|\varphi'\|_{L^\infty}).$$

On introduit donc le cut-off d'une primitive seconde d'une fonction test : soit $\phi\in\mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit $\psi\in\mathcal{D}(]-1,2[$, $0\le\psi\le 1$ et $\psi|_{[0,1]}=1$. On pose :

$$\psi_k(x)=\psi(x)\int_0^x\int_0^y\phi(kt)dtdy.$$

Alors $\|\psi_k'\|_{L^\infty}\le\frac{C}{k}$ et $\|\psi_k\|_{L^\infty}\le\frac{C}{k}$. Le membre de droite dans l'inégalité supposée est majoré par C/k.

D'autre part :

$$u(\psi_k)=\sum_{i=1}^\infty\psi_k(1/i)=\sum_{i=1}^k\psi_k(1/i)+\sum_{i=k+1}^\infty\psi_k(1/i).$$

Remarquons que par définition, $|\psi_k(x)|\le\|\phi\|_{L^\infty}x^2/2$ si $x\in[0,1]$. Donc :

$$\left|\sum_{i=k+1}^\infty\psi_k(1/i)\right|\le C\|\phi\|_{L^\infty}1/k.$$

Enfin, sur $[1/k,1]$, ψ_k est affine de pente $1/k$, donc :

$$\sum_{i=1}^{k}\psi_k(1/i)=\sum_{i=1}^{k}(\psi_k(1/k)+1/k(1/i-1/k))=k\psi_k(1/k)+\log k/k+O(1/k).$$

Comme $|\psi_k(x)|\leq \|\phi\|_{L^\infty}x^2/2$, $k\psi_k(1/k)\leq C/k$ et $u(\psi_k)\sim \log k/k$, d'où la conclusion.

⋆

Solution 3. *Approximation de l'identité et convolution dans L^p*

1. Comme $\phi,\psi\in\mathcal{D}$, $y\mapsto|\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)|\in L^p_y$ et :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)|=|\phi(x-y)|^{1/p'}|\phi(x-y)|^{1/p}|\psi(y)|.$$

On intègre en y et on applique Hölder :

$$\int|\phi(x-y)||\psi(y)|dy\leq\|\phi(x-\cdot)\|_{L^1}^{1/p'}\left(\int|\phi(x-y)||\psi(y)|^pdy\right)^{1/p}.$$

Bien sûr, $\|\phi(x-\cdot)\|_{L^1}=\|\phi\|_{L^1}$ et donc (par Fubini-Tonelli) :

$$\|\phi*\psi\|_{L^p}^p\leq\|\phi\|_{L^1}^{p/p'}\int\int|\phi(x-y)||\psi(y)|^pdydx$$
$$=\|\phi\|_{L^1}p/p'\int\|\phi(\cdot-y)\|_{L^1_x}|\psi(y)|^pdy=\|\phi\|_{L^1}^p\|\psi\|_{L^p}^p.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

2. Comme $\|\phi_m\|_{L^1}=1$, et $\mathrm{Supp}(\phi_m)\subset B(0,1/m)$:

$$(\phi_m*f)(x)-f(x)=\int_{|y|\leq 1/m}m^n\phi(my)(f(x-y)-f(y))dy.$$

Donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,|\phi_m*f)(x)-f(x)|\leq\sup_{y:|y-x|\leq 1/m}|f(x)-f(y)|.$$

Comme f est continue, sur K compact, elle est uniformément continue sur $\overline{K+B(0,1/m)}$ compact et $\sup_{y\in\overline{K+B(0,1/m)}:|y-x|\leq 1/m}|f(x)-f(y)|\to 0$.

Maintenant, soit $\varepsilon>0$ et $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f-g\|_{L^p}<\varepsilon$. On vérifie que les calculs de 1. s'appliquent si on a seulement $\psi\in L^p$. Alors :

$$\|\phi_m*(f-g)\|_{L^p}\leq\|\phi_m\|_{L^1}\|f-g\|_{L^p}\leq\varepsilon.$$

Ensuite, vu que $\mathrm{Supp}(\phi_m*g)\subset\mathrm{Supp}(\phi_m)+\mathrm{Supp}(g)\subset B(0,1)+\mathrm{Supp}(g)=K$ (compact fixé), on a $\|\phi_m*g-g\|_{L^\infty}\to 0$ et donc $\|\phi_m*g-g\|_{L^p}=\|\phi_m*g-g\|_{L^p(K)}\to 0$). Finalement, pour m assez grand :

$$\|\phi_m*f-f\|_{L^p}\leq\|\phi_m(f-g)\|_{L^p}+\|\phi_m*g-g\|_{L^p}+\|g-f\|_{L^p}\leq 3\varepsilon.$$

Et donc $\|\phi_m*f-f\|_{L^p}\to 0$. Pour L^∞, il ne peut y avoir convergence (sur les compacts) que si f est continue. Si $f\in C_0$, il y a convergence uniforme.

On voit facilement que ϕ_m*f est C^∞ (dérivation sous le signe somme). Ensuite, soit $\chi\in\mathcal{D}(B(0,2)$ tel que $\chi|_{B(0,1)}=1$. On pose $f_{n,m}(x)=\chi(x/n)(\phi_m*f)(x)\in\mathcal{D}$. Bien sur, pour tout m, $f_{n,m} \to \phi_m * f$ dans L^p, donc par un argument diagonal si on pose $f_m = f_{n(m),m}$ avec $n(m)$ tel que $\|f_{n(m),m} - \phi_m * f\|_{L^p} \leq 1/m$, on a que $f_m \to f$ dans L^p. Ainsi, $\mathcal{D}$ est dense dans L^p (et $\overline{\mathcal{S}}^{L^\infty} = C_0$).

3. Soit a tel que $p = aq'$. On a :

$$|\phi(x-y)||\psi(y)| = |\phi(x-y)|^a |\phi(x-y)|^{1-a} |\psi(y)|.$$

Et par Hölder :

$$\int |\phi(x-y)||\psi(y)| dy \leq \|\phi(x-\cdot)\|^a_{L^{aq'}} \left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} |\psi(y)|^q dy \right)^{1/q}.$$

On pose $\tilde{\psi} = \psi / \|\psi\|_{L^q}$, alors $\tilde{\psi}^q dy$ est une mesure de masse 1, donc on peut appliquer l'inégalité de Jensen (avec $x \mapsto x^{r/q}$ convexe car $q \leq r$) :

$$\left(\int |\phi(x-y)|^{(1-a)q} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}} \right)^{r/q} \leq \int |\phi(x-y)|^{(1-a)r} \frac{|\psi(y)|^q dy}{\|\psi\|^q_{L^q}}.$$

Mais $p = aq'$ donc $a/p = 1 - 1/q$, $(1/p - a/p)r = 1$ et $(1-a)r = p$. Donc :

$$|\phi * \psi(x)|^r \leq \|\phi\|^{ar}_{L^p} \|\psi\|^{r-q}_{L^q} \int |\phi(x-y)|^p |\psi(y)|^q dy.$$

Enfin, en intégrant en x, avec Fubini-Tonelli :

$$\|\phi * \psi\|^r_{L^r} \leq \|\phi\|^{ar+p}_{L^p} \|\psi\|^{r-q+q}_{L^q} = \|\phi\|^r_{L^p} \|\psi\|^r_{L^q}.$$

On conclut par densité de $\mathcal{D}$ dans les espaces L^p, L^q (avec la même estimée).

⋆