Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 8

Spectre — Opérateurs de Fredholm

Séance du 20 mars 2017

Solution 1. *Échauffement*

Soit $u \in \mathcal{I}$ non nul. Il existe donc $x_0, y_0 \in H$, tous deux non nuls, tels que $u(x_0) = y_0$. Si $x \in H$ est de norme 1, notons

$$v_1 : h \mapsto (h|x)x_0,$$
$$v_2 : h \mapsto \left(h \middle| \frac{y_0}{\|y_0\|^2}\right) x.$$

Alors $v_2 \circ u \circ v_1 =: p_x$ vérifie $p_x \in \mathcal{I}$ (puisque $\mathcal{I}$ est bilatère), et p_x est la projection sur $\operatorname{Vect} x$. Soit maintenant $v \in \mathcal{L}(H)$ de rang fini, et soit $(x_1, \ldots, x_N)$ une base orthonormale de son noyau. Alors $v = (p_{x_1} + \ldots + p_{x_N}) \circ v \in \mathcal{I}$. Donc $\mathcal{I}$ contient tous les opérateurs de rang fini, et comme $\mathcal{I}$ est fermé en norme, et que dans les Hilbert, l'ensemble des opérateurs compacts est *exactement* l'adhérence (pour la norme subordonnée) de l'ensemble des opérateurs de rang fini, $\mathcal{I}$ contient donc $\mathcal{K}(H)$, l'ensemble des opérateurs compacts.

$\star$

Solution 2. *Algèbre de Calkin*

1. Par définition de la norme quotient, $\|\pi(T)\|_{\mathcal{C}} = \inf_{K \in \mathcal{K}(H)} \|T + K\|$.

Soit G un sous-espace de H de codimension finie. On peut supposer que G est fermé. En effet,

$$\|T|_G\| = \sup_{\substack{y \in G \\ \|y\|=1}} \|T(y)\| = \sup_{\substack{y \in \overline{G} \\ \|y\|=1}} \|T(y)\| = \|T|_{\overline{G}}\|.$$

(L'inégalité $\leq$ est évidente, et l'autre provient de la continuité de T.) Ensuite, si l'on note Π la projection sur $G^\perp$, Π est un opérateur continu et de rang fini, donc compact, de sorte que

$$\|T|_{\overline{G}}\| = \sup_{\substack{y \in \overline{G} \\ \|y\|=1}} \|T(y)\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|T(I - \Pi)(x)\| = \|T - T\Pi\| \geq \|\pi(T)\|_{\mathcal{C}},$$

puisque $T\Pi$ est compact. Cela donne une inégalité.

Pour l'autre, utilisons le résultat selon lequel, dans un espace de Hilbert, tout opérateur est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini. Soit donc K compact, et $\{K_n\}$ une suite d'opérateurs de rang fini qui approche K. Soit $n \geq 0$, et $G = \ker K_n$. G est de codimension finie, donc

$$\|T + K_n\| = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|T(x) + K_n(x)\| \geq \sup_{\substack{y \in G \\ \|y\|=1}} \underbrace{\|T(y) + K_n(y)\|}_{=\|T(y)\|} = \|T|_G\|.$$

En prenant l'infimum sur les espaces de codimension finie à droite, puis en faisant tendre n vers l'infini à gauche, on obtient l'autre inégalité.

2. On a vu en cours si T est un opérateur de Fredholm, alors il existe un opérateur R tel que $TR - I$ et $RT - I$ sont compacts. En considérant ces inégalités dans $\mathcal{C}$, on obtient $\pi(T)\pi(R) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$, et $\pi(R)\pi(T) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire que T est inversible dans $\mathcal{C}$.

Inversement, si T est inversible dans $\mathcal{C}$, alors il existe R_1, $R_2 \in \mathcal{L}(H)$ tels que $R_1 T - I$ et $TR_2 - I$ sont compacts, et cela prouve aussi que T est Fredholm (voir cours).

3. Pour déterminer si $T - \lambda I$ est Fredholm, il suffit, d'après la question précédente, d'étudier la classe de $T - \lambda I$ dans $\mathcal{C}$. Notons $t = \pi(T)$ et $e = \pi(I)$. Alors si $|\lambda| > \|t\|_{\mathcal{C}}$, $t - \lambda e = -\lambda(e - \frac{t}{\lambda})$, et donc

$$(t - \lambda e)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(e + \sum_{n\geq 1} \frac{t^n}{\lambda^n}\right),$$

où la série de droite converge puisque $\mathcal{C}$ est une algèbre de Banach. L'expression ci-dessus montre que $\|(t - \lambda e)^{-1}\| \to 0$ quand $|\lambda| \to +\infty$. Supposons à présent que $t - \lambda e$ soit inversible dans $\mathcal{C}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda \mapsto (t - \lambda e)^{-1}$ est une application holomorphe sur $\mathbb{C}$, et bornée, à cause de la remarque précédente. Donc par le théorème de Liouville, cette application est constante, et nulle : c'est absurde.

⋆

Solution 3. *Stabilité du spectre par perturbation compacte*

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ n'est pas valeur propre de A, cela signifie que $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$. Soit $K \in \mathcal{K}(X)$. Supposons que λ soit dans le spectre de $A + K$: il existe alors un opérateur inversible S tel que $(A + K - \lambda I)S = I$. Cela signifie en particulier que $(A - \lambda I)S = I - KS$. Comme $\ker(A - \lambda I) = \{0\}$, et que S est injective, on en déduit que $I - KS$ est aussi injective. Donc elle est surjective, grâce à l'alternative de Fredholm (puisque KS est compact). Donc $A - \lambda I$ est également surjective, ce qui signifie que $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

⋆

Solution 4. *Calculs de spectre*

1. Remarquons que $\|T\| = 1$. On en déduit déjà que $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$, le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Cherchons déjà si T admet des valeurs propres. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $|\lambda| \leq 1$. L'équation $Tu = \lambda u$ implique que $u_1 = \lambda u_0$, $u_2 = \lambda u_1$, et ainsi de suite. Notons donc $u^\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Si $|\lambda| < 1$, alors $u^\lambda \in \ell^1$, et donc λ est valeur propre de T (le sous-espace propre associé est même de dimension 1). En revanche, si $|\lambda| = 1$, alors $u^\lambda \notin \ell^1$, et donc T n'admet pas λ pour valeur propre. Or on sait que $\mathrm{Sp}(T)$ est fermé. Donc $\mathrm{Sp}(T) = \overline{D}(0,1)$.

L'opérateur $T^* : \ell^\infty \to \ell^\infty$, $(u_0, u_1, \ldots) \mapsto (0, u_0, u_1, \ldots)$. On a également $\|T^*\| = 1$. Or T^* n'a pas de valeur propre. En revanche, c'est un fait général dans les Banach que $\mathrm{Sp}(T) = \mathrm{Sp}(T^*)$. (Prouvons-le, pour mémoire : quitte à retrancher ou ajouter $\lambda\,\mathrm{id}$, il suffit de vérifier que T est inversible si et seulement si T^* est inversible. Dans un sens, c'est facile, car si $RT = TR = \mathrm{id}$, alors $T^*R^* = R^*T^* = \mathrm{id}$. Réciproquement, si T^* est surjective, alors on a $\ker(T) = {}^\perp\mathrm{Im}(T^*) = \{0\}$; et si T^* est inversible, il existe $c > 0$ tel que $\forall y^* \in X^*$, $\|T^*(y^*)\| \geq c\|y^*\|$, mais d'après le cours, c'est équivalent au fait que $\mathrm{Im}\, T$ est fermé fort. Ainsi, $\{0\} = \ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$, et par Hahn-Banach, cela oblige donc $\mathrm{Im}(T) = X$.)

2. Observons que T est isométrique. Donc $\|T\| = 1$, et $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \overline{D}(0,1)$. Commençons par chercher les valeurs propres de T. Supposons que λ ne soit pas de module 1, *i.e.* $|\lambda| < 1$. Alors l'égalité $\lambda f(x) = f(x+1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(x)| \leq \lambda^n \|f\|_{L^\infty}$, et donc, en faisant tendre n vers l'infini à x fixé, on trouve que $f \equiv 0$. Donc λ n'est pas

valeur propre de T. En revanche, si $|\lambda| = 1$, écrivons $\lambda = e^{i\theta}$. La fonction $f(x) = e^{i\theta x}$ est alors vecteur propre de T, associé à la valeur propre λ.

Or T est inversiable, d'inverse $S : E \to E$, $f \mapsto f(\cdot - 1)$. On a aussi $\|S\| = 1$. D'autre part, $T - \lambda \,\mathrm{id} = -\lambda T(S - \lambda^{-1}\,\mathrm{id})$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ si et seulement si $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(S)$. Or $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \overline{D}(0,1)$, ce qui achève de prouver que $\mathrm{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$. C'est aussi l'ensemble de ses valeurs propres.

⋆

Solution 5. *Opérateurs de Toeplitz sur le cercle*

1. Clairement, pour tout $h \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\|M_f(h)\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^\infty}\|h\|_{L^2}$. Donc M_f est continue, de norme $\leq \|f\|_{L^\infty}$. Montrons l'égalité. Soit $x \in \mathbb{T}$ tel que $|f(x)| = \|f\|_{L^\infty}$. Quitte à changer f en $-f$, on suppose que $f(x) > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, grâce à la continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que si $|y - x| \leq \eta$, on a $f(y) \geq \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon$. Soit $h = \mathbb{1}_{[x-\eta, x+\eta]}$. On voit que $\|M_f(h)\|_{L^2} \geq (2\eta)^{1/2}(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon) = \|h\|_{L^2}(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon)$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\|M_f\| \geq \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Un calcul précautionneux montre que $[\Pi, M_{e_n}](e_k) = \pm e_{n+k}$, où le signe $+$ vient du cas où $n > 0$, $-n \leq k \leq 0$, et le signe $-$ du cas où $n < 0$, $0 \leq k \leq -n$. Comme $\{e_n\}$ est une base hilbertienne de L^2, cela prouve que $\forall h \in L^2$, $[\Pi, M_{e_n}](h) \in \mathrm{Vect}(e_{-n}, \ldots, e_n)$, et donc que $[\Pi, M_{e_n}]$ est de rang fini.

Notons F l'espace vectoriel engendré par les e_n, $n \in \mathbb{Z}$ (c'est l'ensemble des polynômes trigonométriques). Par le théorème de Stone-Weierstrass, on sait que F est dense dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Soit donc $\{f_n\}$ une suite de F telle que $\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0$. Comme Π est de norme 1, on a

$$\|[\Pi, M_{f_n}] - [\Pi, M_f]\| \leq 2\|\Pi\|\|M_{f_n} - M_f\| = 2\|f_n - f\|_{L^\infty} \to 0.$$

Donc $[\Pi, M_f]$ est limite en norme d'une suite d'opérateurs de rang fini, donc est compact sur L^2.

3. Si $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on écrit

$$T_{fg} - T_f T_g = \Pi M_f M_g - \Pi M_f \Pi M_g = \Pi[\Pi, M_f]M_g,$$

donc $T_{fg} - T_f T_g$ est compact.

4. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$ et $k \in \mathbb{Z}$, calculons

$$c_k(\rho_\alpha(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x - \alpha)e^{-ikx}dx = e^{-ik\alpha}c_k(f).$$

En particulier, ρ_α n'agit que sur les coefficients de Fourier un à un, et par multiplication. Donc il commute avec Π.

5. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction qui s'annule identiquement sur un ouvert $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{T}$.

(i) Quitte à faire « pivoter » g, on suppose que cet ouvert $\mathcal{O}$ contient un arc de cercle $[-\omega, \omega]$, sur lequel g est donc nulle. En choisissant $\alpha := 2\omega$, on voit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho_\alpha \circ M_g)^n = 0$. En effet, appliquer $\rho_\alpha \circ M_g$ à une fonction revient à la multiplier par g, et à la faire pivoter de l'angle α. Il suffit donc de choisir $n = \lceil \frac{2\pi}{\alpha} \rceil$.

(ii) On peut faire le calcul dans l'algèbre de Calkin (cf. TD précédent). Dans cette algèbre, Π commute à la fois avec ρ_α et avec M_g (d'après la question 2), donc on trouve $(\rho_\alpha \circ T_g)^n = (\rho_\alpha \circ \Pi \circ M_g)^n = \Pi \circ (\rho_\alpha \circ M_g)^n = 0$, ce qui signifie exactement que $(\rho_\alpha \circ T_g)^n$ est compact.

(iii) Si T_g était de Fredholm sur H^2, comme ρ_α est Fredholm (parce qu'inversible d'inverse $\rho_{-\alpha}$), et comme la composée de deux opérateurs de Fredholm est Fredholm, on obtiendrait que $(\rho_\alpha \circ T_g)^n$ est à la fois Fredholm et compact. C'est impossible en dimension infinie (penser à la caractérisation : $RT - I$ et $TR - I$ compacts).

6. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est telle que $\exists \theta_0 \in \mathbb{T}$ tel que $f(\theta_0) = 0$, on peut approcher f arbitrairement près (au sens de la norme L^∞) par des fonctions qui s'annulent sur un petit voisinage de θ_0, donc approcher T_f (au sens de la norme opérateur) par des opérateurs qui ne sont pas de Fredholm. Comme ces derniers constituent un fermé, cela montre que T_f n'est pas de Fredholm.

7. On vient de voir que si f s'annule, alors T_f n'est pas de Fredholm. Réciproquement, si f ne s'annule pas, alors notons $g := 1/f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. D'après la question 3, $I = T_{gf} = T_g T_f + K$, où K est compact, et de même, $I = T_{fg} = T_f T_g + K'$, où K' est compact. Cela prouve que T_f est un opérateur de Fredholm.

⋆