Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 8

Convolution des distributions

Séance du 28 mars 2018

Solution 1. *Échauffement*

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)dx = \phi(0) = \langle \delta_0, \phi \rangle.$$

2. • δ_a est à support compact, il n'y a donc pas de problème pour calculer

$$(\delta_a * H)' = \delta_a * H' = \delta_a * \delta_0 = \delta_a,$$

donc $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x \geq a}$. On peut aussi remarquer directement que $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x-a)$, et donc

$$\langle H * \delta_a, \psi \rangle = \langle H, \check{\delta_a} * \psi \rangle = \langle H, \psi(\cdot + a) \rangle = \langle \mathbb{1}_{x \geq a}, \psi \rangle.$$

• On calcule : $\delta_0' * \mathbb{1} = (\delta_0 * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Il faut remarquer que si $m > n$, $x^m \delta_0^{(n)} = 0$ (on fait le calcul explicite sur une fonction test, grâce à la formule de Leibniz). Par ailleurs, on calcule, pour $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle x^m \delta_0^{(n)}, \psi \rangle = \langle \delta_0^{(n)}, x^m \psi(x) \rangle &= (-1)^n (x^m \psi)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n \binom{n}{m} (m!) \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m \langle \delta_0^{(n-m)}, \psi \rangle.\end{aligned}$$

Ainsi, $x^m \delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors

$$x^m \delta_0^{(n)} * x^p \delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)},$$

puisque pour tous $r, s \geq 0$, $\delta_0^{(r)} * \delta_0^{(s)} = (\delta_0 * \delta_0)^{(r+s)} = \delta_0^{(r+s)}$.

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'$, il n'y a pas de problème pour définir leur convolution. Ensuite,

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}_{[a,b]}' * \mathbb{1}_{[c,d]}' = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ (voir plus haut), donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• $T * \mathbb{1}$ est bien définie en tant que distribution, car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite,

$$\langle T * \mathbb{1}, \psi \rangle = \langle T, \check{\mathbb{1}} * \psi \rangle = \langle T, \mathbb{1} * \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi \cdot \langle T, \mathbb{1} \rangle.$$

Ainsi, $T * \mathbb{1} = \langle T, \mathbb{1} \rangle \mathbb{1}$ est une distribution constante.

• $T * \exp$ est bien définie, comme précédemment. On calcule

$$\langle T * \exp, \psi\rangle = \langle T, \check{\exp} * \psi\rangle = \left\langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{y-x}\psi(y)dy\right\rangle = \int \psi(y)e^y\langle T, \exp(-x)\rangle dy.$$

Et donc $T * \exp = \langle T, \exp(-x)\rangle \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T * \exp)' = T * \exp$, donc nécessairement $T * \exp = C \exp$, pour un $C \in \mathbb{R}$. Ensuite, on calcule

$$C = (T * \exp)(0) = \langle T, \check{\exp}\rangle = \langle T, \exp(-x)\rangle.$$

3. En dérivant l'égalité, on voit qu'on veut en fait

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - \tau_1 u = \delta_0'.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k'.$$

Calculons alors $\delta_a' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^{n} \delta_k'$, la somme se télescope, et on a

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Comme $T_n \rightharpoonup u$ (dans $\mathcal{D}'$), $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Solution 2. *Dérivées successives des fonctions test*

1. On peut écrire H_a sous la forme

$$H_a = \frac{1}{a}\mathbb{1}_{[0,a]}.$$

On a $(u * H_a)' = \frac{1}{a}u * (\delta_0 - \delta_a) = \frac{1}{a}(u(x) - u(x-a))$, qui est de classe $\mathcal{C}^k$ si $u \in \mathcal{C}^k$. On a donc prouvé que $u * H_a \in \mathcal{C}^{k+1}$.

2. On a $\int_{\mathbb{R}} u * H_a dx = \iint u(y)H_a(x-y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} u(y)dy$, car $\int_{\mathbb{R}} H_a(x-y)dx = \frac{1}{a}\int_y^{y+a} 1dx = 1$.

3. Il suffit de vérifier que $H_{a_0} * H_{a_1}$ est continue, et de raisonner par récurrence, en appliquant la question 1. On a

$$H_{a_0} * H_{a_1}(x) = \frac{1}{a_0a_1}\int_0^{a_0} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(x-y)dy = \frac{1}{a_0a_1}\left(\int_0^x \mathbb{1}_{[0,a_1]}(y)dy - \int_0^{x-a_0} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(y)dy\right),$$

qui est bien une fonction continue en x.

Par ailleurs, le support de $H_{a_0} * \ldots * H_{a_n}$ est inclus dans la somme des supports, c'est-à-dire dans $[0, a_0 + \cdots + a_n]$.

4. Soit $j < n$. On calcule

$$(H_{a_0} * \ldots * H_{a_n})^{(j)} = \frac{1}{a_0 \cdots a_{j-1}}(\delta_0 - \delta_{a_0}) * \cdots * (\delta_0 - \delta_{a_{j-1}}) * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}.$$

On a donc 2^j termes de la forme

$$\delta_\kappa * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Chacun est majoré par $\|H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^\infty} \leq \|H_{a_j}\|_{L^\infty} \|H_{a_{j+1}} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1}$, et comme on a $\|H_{a_{j+1}} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1} = 1$ d'après la question 2, et que d'autre part $\|H_{a_j}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{a_j}$, on peut conclure. L'autre majoration fonctionne de même.

5. On montre d'abord que u_n est de Cauchy dans L^∞. On utilise l'associativité de la convolution, et la positivité des H_a :

$$\begin{aligned}
|u_n(x) - u_{k+n}(x)| &= |u_n(x) - u_n * (H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}})(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y)(u_n(x-y) - u_n(x))dy \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y) \|u_n'\|_{L^\infty} |y| dy
\end{aligned}$$

Sur le support de $H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}$, on a $|y| \leq a_{n+1} + ... + a_{n+k}$, donc on obtient

$$\|u_n - u_{k+n}\|_{L^\infty} \leq \frac{2}{a_0 a_1}(a_{n+1} + ... + a_{n+k}).$$

Comme la somme des a_j est convergente, cela prouve que $\{u_n\}$ est de Cauchy dans L^∞. On procède de la même manière pour les dérivées.

Ainsi, on a montré que u_n converge uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, vers une fonction C^∞, dont le support est inclus dans $[0, a_\infty]$, où $a_\infty := \sum_j a_j$ (en particulier, u est à support compact).

6. Par la formule de Taylor, un fonction vérifiant de tels encadrements sur ses dérivées pour $\alpha \leq 1$ serait analytique, ce qui l'empêche d'être à support compact par le théorème des zéros isolés. En revanche, si $\alpha > 1$, on peut appliquer la construction précédente avec $a_n = n^{-\alpha}$ (qui est sommable) : ainsi, pour tout $\alpha > 1$, il existe des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ dont les dérivées n-ièmes sont uniformément majorées par $2^n (n!)^\alpha$.

⋆

Solution 3. *Équations différentielles linéaires*

1. Soient $S, T \in \mathcal{D}'_+$, et $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty$. Alors $\check{S}$ est à support dans $\mathbb{R}_-$, et $\check{S} * \psi$ dans $\mathbb{R}_- + \mathrm{supp}(\psi) =: X$. L'important est que $\mathbb{R}_+ \cap X$ est compact. Soit χ une fonction test qui vaut 1 au voisinage de $\mathbb{R}_+ \cap X$. Alors

$$\langle T * S, \psi \rangle = \langle T, \check{S} * \psi \rangle = \langle T, \chi(\check{S} * \psi) \rangle,$$

donc $T * S$ est bien définie. De plus, son support est inclus dans $\mathbb{R}_+$, puisque si ψ est supportée dans $\mathbb{R}_-$, alors $X \subseteq \mathbb{R}_-$, et donc $\chi \equiv 0$ et $\langle T * S, \psi \rangle = 0$.

Ainsi $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre d'élément neutre δ_0. L'associativité se démontre comme dans le cours.

2. Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
(\delta_0' - \lambda \delta_0) * (H(t) e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t) e^{\lambda t}) - \lambda \delta_0 * (H(t) e^{\lambda t}) \\
&= (\delta_0 * (H(t) e^{\lambda t}))' - \lambda H(t) e^{\lambda t} \\
&= (H(t) e^{\lambda t})' - \lambda H(t) e^{\lambda t} \\
&= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t) e^{\lambda t} - \lambda H(t) e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. Pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) &= \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)\\ &= \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} + H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!},\end{aligned}$$

qui vaut $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-(n-1)}$ par hypothèse de récurrence. Cela assure l'hérédité.

4. On considère l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = f(t)$. Alors on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme :

$$\left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0.$$

Introduisons le polynôme $P = \sum_{k=0}^K a_k X^k$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on le factorise en produit de facteurs de degré 1, soit $P = \beta\prod_j (X - \lambda j)^{n_j}$, et donc

$$\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k} = \beta \cdot \bigstar_j(\delta' - \lambda_j\delta)^{n_j}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right)^{*-1} = \frac{1}{\beta}\cdot\bigstar_j\left(H(t)\frac{t^{n_j-1}e^{\lambda_j t}}{(n_j-1)!}\right).$$

⋆

Solution 4. *Équation de Volterra*

1. D'après la question 1 de l'exercice précédent, la convolution $T_k * S$ est bien définie. D'autre part, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $\check{T}_k * \phi \to \check{T} * \phi$ dans $\mathcal{D}$, et donc

$$\langle S * T_k, \phi\rangle = \langle S, \check{T}_k * \phi\rangle \to \langle S, \check{T} * \phi\rangle = \langle S * T, \phi\rangle.$$

2. On peut montrer cette propriété par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Si à présent $n \geq 1$, et $x \in [0, a]$,

$$|K^{*(n+1)}(x)| \leq \int_0^x |K(x-y)| \cdot |K^{*n}(y)|dy \leq \int_0^x M_a \cdot M_a^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}dy \leq M_a^{n+1}\frac{x^n}{n!}.$$

3. D'après la question précédente, K^{*n} est localement bornée, donc localement intégrable, et s'identifie donc à une distribution. Fixons $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et soit $a > 1$ tel que $\operatorname{supp}\phi \subseteq [-a, a]$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$|\langle K^{*n}, \phi\rangle| \leq \int_0^a M_a^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}|\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_{L^1} M_a^n \frac{a^n}{n!},$$

en majorant x par a sous l'intégrale. Cela prouve que la série $\sum(-1)^n\langle K^{*n}, \phi\rangle$ est absolument convergente, et donc que $\sum(-1)^n K^{*n}$ converge au sens de $\mathcal{D}'$. En notant L sa limite, on voit que

$$|\langle L, \phi\rangle| \leq e^{aM_a}\|\phi\|_{L^1},$$

et donc par dualité, L s'identifie à une fonction localement bornée.

Enfin, notons que, si $N \in \mathbb{N}$, on trouve par un argument de télescopage que

$$(\delta_0 + K) * \left(\delta_0 + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n K^{*n}\right) = \delta_0 + (-1)^N K^{*(N+1)}.$$

Or d'après l'inégalité ci-dessus, $K^{*(N+1)} \to 0$ dans $\mathcal{D}'$ quand $N \to +\infty$. D'après la question 1, on peut donc passer à la limite, et trouver le résultat cherché :

$$(\delta_0 + K) * (\delta_0 + L) = \delta_0.$$

4. Notons $K(x) = H(x)e^{\lambda x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction localement bornée à support dans $\mathbb{R}_+$. On a clairement, pour presque tout x,

$$(\delta_0 + K) * f(x) = f(x) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy.$$

Puisqu'on a affaire à des fonctions localement intégrables, l'égalité au sens presque partout est équivalente à l'égalité au sens des distributions. Soit à présent L comme ci-dessus. On peut poser

$$f = (\delta + L) * g,$$

qui est bien une solution de l'équation fonctionnelle. Comme $f(x) = g(x) + \int_0^x L(x - y)g(y)dy$, cette fonction f est bien localement intégrable.

⋆

Solution 5. *Régularisation par polynômes*

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Supposons que $\operatorname{supp} \phi \subset B(0, R)$. On calcule, grâce au changement de variables $u = kx$,

$$\begin{aligned}\langle P_k, \phi\rangle = \int_{B(0,R)} P_k(x)\phi(x)dx &= k^{-n} \int_{B(0,kR)} P_k\left(\frac{u}{k}\right) \phi\left(\frac{u}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B(0,kR)} \left(1 - \frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}} \phi\left(\frac{u}{k}\right) du.\end{aligned}$$

Ensuite, on rappelle que si $y \in [0, p]$, alors

$$\left|e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{p}\right)^p\right| \leq \frac{1}{e(p-1)}. \qquad (\star)$$

En effet, on considère $f : [0, p] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto e^{-y} - (1 - \frac{y}{p})^p$, et

$$f'(y) = -e^{-y} + (1 - \tfrac{y}{p})^{p-1} = e^{-y}\left(\exp((p-1)\ln(1 - \tfrac{y}{p}) + y) - 1\right).$$

Donc f' a le signe de $g(y) := (p-1)\ln(1-\frac{y}{p})+y$. Or $g'(y) = 1 - \frac{p-1}{p-y}$, g est donc croissante sur $[0, 1]$, décroissante sur $[1, p[$. Comme $g(0) = 0$ et $g(y) \to -\infty$ quand $y \to p^-$, il existe un unique c_p ($c_p \geq 1$) tel que $g \geq 0$ sur $[0, c_p]$ et $g \leq 0$ sur $[c_p, p[$. De plus, c_p vérifie

$$(p-1)\ln\left(1 - \frac{c_p}{p}\right) = -c_p.$$

Finalement, f atteint son maximum en c_p (puisque $f(0) = 0$, $f(p) = e^{-p}$, on a aussi $f \geq 0$ sur $[0, p]$), et on trouve

$$f(c_p) = e^{-c_p} - e^{p\ln(1-\frac{c_p}{p})} = e^{-c_p} - e^{-\frac{p}{p-1}c_p} = e^{-c_p}\left(1 - e^{-\frac{c_p}{p-1}}\right) \leq e^{-c_p}\frac{c_p}{p-1}.$$

(car $e^y \geq 1 + y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$). Et finalement, comme $y \mapsto ye^{-y}$ atteint son maximum $1/e$ en 1, on obtient $(\star)$.

Maintenant, avec $y = |u|^2$ et $p = k^{n+2}$, pour $k \geq R^2$ et $u \in B(0, kR)$, $|u|^2 \leq |kR|^2 \leq k^{n+2}$, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(0,kR)}\left(1 - \frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du - \int_{B(0,kR)}e^{-|u|^2}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du\right| \\ \leq \frac{1}{e(k^{n+2}-1)}\int_{B(0,kR)}\left|\phi\left(\frac{u}{k}\right)\right|du = \frac{k^n}{e(k^{n+2}-1)}\|\phi\|_{L^1} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Enfin, on voit que $\phi(u/k) \to \phi(0)$ lorsque $k \to \infty$ à $u \in \mathbb{R}^n$ fixé, et la domination

$$|e^{-|u|^2}\phi(u/k)\mathbb{1}_{B(0,kR)}(u)| \leq e^{-|u|^2}\|\phi\|_{L^\infty}$$

permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\int_{B(0,kR)}e^{-|u|^2}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|u|^2}du\right)\phi(0) = \pi^{n/2}\phi(0).$$

Finalement, on a bien :

$$\langle P_k, \phi\rangle \to \phi(0), \quad P_k \rightharpoonup \delta_0.$$

2. Soit T une distribution à support compact. On identifie alors P_k à un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de sorte que la convolution $T * P_k$ est bien définie. De plus, on a directement

$$D^{(2k^{n+2}+1,\ldots,2k^{n+2}+1)}(T * P_k) = T * \left(D^{(2k^{n+2}+1,\ldots,2k^{n+2}+1)}P_k\right) = 0,$$

donc $T * P_k$ est un polynôme.

Ensuite, vu que pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, $\check{T} * \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle T * P_k, \phi\rangle = \langle P_k, \check{T} * \phi\rangle \longrightarrow (\check{T} * \phi)(0) = \langle T, \phi\rangle.$$

Et ainsi on a prouvé que $T * P_k \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

$\star$