Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 8

Distributions : singularités et régularisation

Séance du 25 mars 2019

Solution 1. *Échauffement*

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle \delta_0', \varphi \rangle = -\varphi'(0)$. Supposons que δ_0' soit une mesure, et notons $K = [-1, 1]$. Il existerait alors une constante $C > 0$ telle que pour tout φ à support dans K, $|\langle \delta_0', \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{C}^0_K}$.

Soit donc $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive, à support dans K, et telle que $\psi'(0) = 1$. Notons $\varphi_n(x) := \psi(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On voit que φ_n reste à support dans K pour tout $n \geq 1$, que $\|\varphi_n\|_{\mathcal{C}^0_K} = \|\psi\|_{\mathcal{C}^0_K}$, et enfin que

$$\langle \delta_0', \varphi_n \rangle = -\varphi_n'(0) = -n\psi'(0) = -n,$$

ce qui contredit l'inégalité ci-dessus lorsque $n \to +\infty$.

⋆

Solution 2. *Distributions régulières*

1. L'hypothèse se reformule ainsi : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi + \langle T, \varphi' \rangle = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, d'intégrale 1. Soit g une primitive de f, donc de classe C^1. On a également, par intégration par partie, l'égalité $\int f\varphi + \langle T_g, \varphi' \rangle = 0$. On en déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle T - T_g, \varphi' \rangle = 0$, ce qui signifie que $(T - T_g)' = 0$. Supposons montré que les distributions de dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ sont les seules constantes : on trouve ainsi que $T = T_g + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Donc T s'identifie à $g + c$, qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit à présent $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$. Montrons que T est constante. Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a $\langle T, \psi' \rangle = 0$. Donnons-nous $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ fixée, positive, d'intégrale 1. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\varphi(y) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi \right) \chi(y) \right) dy.$$

Observons que c'est seulement parce qu'on lui a retranché sa moyenne qu'une telle « primitive » de φ est toujours une fonction test. De la sorte, $\varphi = \psi' + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi \right) \chi$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi \right) \langle T, \chi \rangle$, et donc T s'identifie à la distribution constante égale à $\langle T, \chi \rangle$.

2. Posons $g(x) = \exp(\int_0^x a(t)dt)$. C'est une fonction C^∞. On peut donc calculer

$$\langle (gu)', \varphi \rangle = -\langle gu, \varphi' \rangle = -\langle u, g\varphi' \rangle = \langle u, g'\varphi - (g\varphi)' \rangle.$$

Mais $g' = ag$, donc

$$\langle u, g'\varphi - (g\varphi)' \rangle = \langle u, ag\varphi - (g\varphi)' \rangle = \langle au + u', g\varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle = \langle fg, \varphi \rangle.$$

Cela prouve que $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u aussi est C^1. De plus, $u' + au - f$ s'étend par densité en une forme linéaire continue sur $C^0([0,1])$ donc on a $\int_0^1 |u'+au-f|^2 = 0$, ce qui signifie que u est une solution au sens classique.

3. Classiquement, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p si $p<\infty$ (on peut considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut être étendue en une application $\tilde{T}$ continue sur L^p, avec la même inégalité (grâce à la complétude de $\mathbb{R}$). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ pour tout $\varphi \in L^p$, donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

4. On va appliquer le résultat précédent. On introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, positive, d'intégrale 1. Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Il existe une primitive $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ de $\Phi := \varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right)\chi : \psi(x) = \int_0^x \Phi(t)dt$. Ainsi,

$$\langle T,\varphi\rangle = \langle T,\psi'\rangle + \left(\int_0^1 \varphi\right)\langle T,\chi\rangle = -\int_0^1 f\psi + \left(\int_0^1 \varphi\right)\langle T,\chi\rangle.$$

Mais $\langle T,\chi\rangle$ est une constante C, et $|\int_0^1 \varphi| \le \|\varphi\|_{L^2}$, par Cauchy-Schwarz. Enfin, $\left|\int_0^1 f\psi\right| \le \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de φ. Pour cela, on voit par Cauchy-Schwarz que $\|\psi\|_{L^2} \le \|\Phi\|_{L^2}$, et donc

$$\|\psi\|_{L^2} \le \left\|\varphi - \left(\int_0^1 \varphi\right)\chi\right\|_{L^2} \le (1+\|\chi\|_{L^2})\|\varphi\|_{L^2},$$

ce qui permet de conclure que

$$|\langle T,\varphi\rangle| \le (1+\|\chi\|_{L^2} + |\langle T,\chi\rangle|)\|\varphi\|_{L^2}.$$

Par 3., T s'identifie donc à $u \in L^2(]0,1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0,1])$ avec $v(0)=0$. Comme précédemment, pour $x\in[0,1]$, $|v(x)| \le \|v'\|_{L^2}$, donc $\|v\|_{L^\infty} \le \|v'\|_{L^2}$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. On voit alors que si pour $x\in[0,1]$, $u_n(x) := \int_0^x v_n(t)dt$, alors u_n est de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$, puis dans $C^0([0,1])$ grâce à l'estimée précédente. Donc u_n converge vers une fonction $\tilde{u}$ dans $C^0([0,1])$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (voir la question 1.), et ainsi $u \in C^0([0,1])$.

$\star$

Solution 3. *Fonctions lipschitziennes*

Supposons que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est lipschitzienne. Pour tout $1\le j\le d$ et $h\in\mathbb{R}_+$, on pose

$$\tau_h^j f : x \mapsto f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\dots,x_d).$$

Si $x\in\mathbb{R}^d$, on a donc $|\tau_h^j f(x) - f(x)| \le Ch$ (quitte à changer la norme sur $\mathbb{R}^d$). Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $h>0$, on a d'une part

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\tau_h^j f(x)-f(x)}{h}\right)\varphi(x)dx\right| \le C\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|dx = C\|\varphi\|_{L^1},$$

et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{\tau_h^j f(x)-f(x)}{h}\right)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\left(\frac{\tau_{-h}^j\varphi(x)-\varphi(x)}{h}\right)dx \xrightarrow[h\to0^+]{} -\int_{\mathbb{R}^d} f\partial_{x_j}\varphi,$$

grâce au théorème de convergence dominée. Cela signifie que

$$|\langle \partial_{x_j} f,\varphi\rangle| \le C\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

et donc $\partial_{x_j} f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Grâce au théorème de dualité, on voit que $\partial_{x_j} f$ s'identifie alors à une fonction L^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

Réciproquement, si f est bornée sur $\mathbb{R}^d$ et que toutes ses dérivées partielles, au sens des distributions, s'identifient à des fonctions bornées, montrons que f est lipschitzienne. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, positive, à support dans $B_{\mathbb{R}^d}(0,1)$, et telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$. Pour $n \geq 1$, la suite des fonctions $\varphi_n : x \mapsto n^{-d}\varphi(nx)$ constitue donc une approximation de l'unité. Posons $f_n := f * \varphi_n$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, pour tout $1 \leq j \leq d$, on a $\partial_{x_j} f_n = (\partial_{x_j} f) * \varphi_n$, donc en notant

$$C := \max_{1\leq j\leq d} \|\partial_{x_j} f\|_{L^\infty},$$

on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|\partial_{x_j} f_n(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} f(y)\varphi_n(x-y)dy\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x-y)dy = C.$$

D'où $\|\partial_{x_j} f_n\|_{L^\infty} \leq C$, uniformément en $n \geq 1$. De même, $\|f_n\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$. Le théorème des accroissements finis classique, pour les fonctions lisses, assure donc que $\forall n \geq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq C\sqrt{d}\|x-y\|_2. \tag{$\star$}$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ dans le membre de gauche, on trouve que f est lipschitzienne.

Remarque : Pour voir ce dernier fait, la meilleure idée est d'appliquer le théorème d'Ascoli à la famille $\{f_n\}$, en se plaçant sur les compacts $\bar{B}(0,N)$, $N \in \mathbb{N}$. Alors la famille est équicontinue (grâce à la borne uniforme en n dans l'inégalité $(\star)$), et elle prend ses valeurs, en chaque point $x \in \bar{B}(0,N)$, dans le compact $[-\|f\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^\infty}]$. Donc on peut extraire de $\{f_n\}$ une sous-suite qui converge uniformément sur $\bar{B}(0,N)$. Il suffit de faire une extraction diagonale pour trouver une sous-suite $\{n_k\}$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$f_{n_k} \to g$$

uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^d$. Cela implique en particulier que $f_{n_k} \to g$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donc que $g = f$, puisqu'on sait que $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f_{n_k}(x) \to f(x)$, et on peut passer à la limite dans $(\star)$.

$\star$

Solution 4. *Pseudo monômes*

1. La fonction $x \mapsto x_+^\alpha$ est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\alpha > -1$.

2. Écrivons $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\psi(x) = \int_0^1 \varphi(tx)dx \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}$. On découpe l'intégrale en 1 :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty x^\alpha\varphi &= \int_\varepsilon^1 x^\alpha\varphi(0) + \int_\varepsilon^1 x^{1+\alpha}\psi + \int_1^\infty x^\alpha\varphi \\ &= \varphi(0)\frac{1-\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_\varepsilon^1 x^{1+\alpha}\psi + \int_1^\infty x^\alpha\varphi.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes admettent une limite quand $\varepsilon \to 0$ (car $1+\alpha > -1$). Posons donc $A = -\varphi(0)/(1+\alpha)$. On obtient donc la formule demandée, avec

$$\langle \text{pf}(x_+^\alpha), \varphi\rangle = \frac{\varphi(0)}{1+\alpha} + \int_0^1 x^\alpha(\varphi(x)-\varphi(0)) + \int_1^\infty x^\alpha\varphi.$$

On voit que si $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$,

$$|\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \varphi\rangle| \leq (\frac{1}{1+\alpha} + M^{\alpha+1})\|\varphi\|_{L^\infty} + \int_0^1 x^{\alpha+1}\|\varphi'\|_{L^\infty} \leq C_M(\|\varphi\|_{L^\infty} + \|\varphi'\|_{L^\infty}),$$

donc $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est d'ordre inférieur ou égal à 1.

L'ordre de cette ditribution est non nul car sinon, $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ apparaîtrait comme une mesure. Mais considérons une fonction plateau χ égale à 1 sur un voisinage $[-1, 1]$ de 0, et $f(x) := x_+^{-1-\alpha}\chi$. Alors f est continue, avec $f(0) = 0$ car $-1-\alpha > 0$, mais $\int_\varepsilon^1 x^\alpha f dx \geq \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$ pour $\varepsilon \leq 1$ n'admet pas de limite quand $\varepsilon \to 0$.

3. Il faut cette fois développer à l'ordre m :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x),$$

avec $\psi(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!}\varphi(tx)dx \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_{L^\infty} \leq \|\varphi^{(m)}\|_{L^\infty}$.

On trouve que

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{1-\varepsilon^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1} + \int_\varepsilon^1 x^{\alpha+m}\psi(x)dx + \int_1^\infty x^\alpha \varphi(x)dx.$$

On pose $A_k = -\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\frac{1}{\alpha+k+1}$ pour $k \in [\![0, m-1]\!]$. Comme $\alpha + m > -1$, le reste correspondant a une limite pour ε tendant vers 0 qui permet de définir

$$\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(\alpha+k+1)} + \int_0^1 x^\alpha \left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\right) dx + \int_1^\infty x^\alpha \varphi.$$

4. Il faut calculer $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)(\varphi')$. On fait une intégration par partie, et on trouve que $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)' = \alpha \mathrm{pf}(x_+^{\alpha-1})$. En effet,

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)dx = -\int_\varepsilon^\infty \alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x)dx - \varepsilon^\alpha \varphi(\varepsilon),$$

mais $\varepsilon^\alpha\varphi(\varepsilon)$ n'a pas d'ordre entier dans son développement asymptotique. Par unicité du développement asymptotique en ε lorsque ε tend vers 0, on peut identifier les termes d'ordre 0 qui sont les parties finies.

Ainsi, l'ordre de $\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ est au plus la partie entière de $-\alpha$.

On peut montrer que l'ordre vaut exactement $m := \lfloor -\alpha \rfloor$. Sinon, elle s'étendrait à $\mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R})$, donc on peut considérer une fonction $f \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R})$ à support dans $[0, 2]$ et telle que $f^{(m-1)} = x^{-\alpha-m}$ sur $[0, 1]$. Alors $-\alpha - m \geq 0$ donc $f^{(m-1)}(0) = 0$. De plus, $\mathrm{pf}(x_+^{\alpha+m-1})^{(m-1)} = (\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\dots(\alpha+1)\mathrm{pf}(x_+^\alpha)$ donc en posant $c_\alpha = (\alpha+m-1)(\alpha+m-2)\dots(\alpha+1)$,

$$\begin{aligned} c_\alpha\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), f\rangle &= (-1)^{m-1}\langle \mathrm{pf}(x_+^{\alpha+m-1}), f^{(m-1)}\rangle \\ &= (-1)^{m-1}(\frac{f^{(m-1)}(0)}{1+\alpha+m-1} + \int_0^1 x^{\alpha+m-1}(f^{(m-1)}(x) - f^{(m-1)}(0)) + \int_1^\infty x^{\alpha+m-1}f^{(m-1)}). \end{aligned}$$

Comme $f^{(m-1)}(0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1}c_\alpha\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), f\rangle &= \int_0^1 x^{\alpha+m-1}f^{(m-1)}(x) + \int_1^2 x^{\alpha+m-1}f^{(m-1)} \\ &\geq \int_0^1 x^{\alpha+m-1} + \int_1^2 x^{\alpha+m-1}f^{(m-1)} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

puisque $\alpha + m - 1 < -1$ et le terme de droite est borné.

5. Si $\alpha > -1$, on conclut directement au moyen du théorème de convergence dominée la convergence $\int_0^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)dx \to \int_0^{+\infty} x^{\alpha_0}\varphi(x)dx$ lorsque α tend vers α_0.

Si $\alpha < -1$, lorsque $\alpha \to \alpha_0$, $\lfloor -\alpha \rfloor = \lfloor -\alpha_0 \rfloor = m$ (au moins pour α assez proche de α_0). Ainsi, les deux expressions $\langle \mathrm{pf}(x_+^\alpha), \varphi\rangle$ et $\langle \mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0}), \varphi\rangle$ sont constituées des mêmes termes, où l'on a remplacé α par α_0. Ensuite, on a convergence terme à terme (par exemple, grâce au théorème de convergence dominée), d'où $\mathrm{pf}(x_+^\alpha) \to \mathrm{pf}(x_+^{\alpha_0})$ au sens des distributions.

6. On calcule comme précédemment :

$$\int_\varepsilon^1 x^{-m}\left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)dx$$
$$= \int_\varepsilon^1 x^{-m}\varphi(x) + \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-m)}(-\varepsilon^{k+1-m}) + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}\ln\varepsilon.$$

(puisque $\ln(1) = 0$). Et on a donc (tous les termes sont bien définis) :

$$\mathrm{pf}(x_+^{-m})(\varphi) = \int_1^\infty x^{-m}\varphi(x)dx + \sum_{k=0}^{m-2}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-m)} + \int_0^1 x^{-m}\left(\varphi(x) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k\right).$$

Cette expression assure donc qu'il s'agit d'une ditribution, d'ordre au plus m. En fait, on calcule la dérivée comme avant :

$$\mathrm{pf}(x_+^{-m})' = -m\mathrm{pf}(x_+^{-(m+1)}) + \frac{(-1)^m\delta_0^{(m)}}{m!}.$$

Et par récurrence, on obtient que l'ordre est m.

Pour la convergence : si $-\alpha \to m$ par valeurs supérieures, la partie entière de $-\alpha$ est m. Si $-\alpha \to m$ par valeurs supérieures, la partie entière de $-\alpha$ est $m-1$, mais la formule est aussi valable avec m. En comparant les termes, on voit que tous convergent, sauf le dernier $\frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!(m+\alpha)}$, qui diverge dès que $\varphi^{(m-1)}(0) \neq 0$. Ainsi les $\mathrm{pf}(x_+^{-m})$ ne sont pas limites de $\mathrm{pf}(x_+^{-\alpha})$.

$\star$

Solution 5. *Représentation d'une distribution*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_Q^\infty(\Omega)$. Notons $Q(x) = \{y \in Q \mid \ y_i \leq x_i,\, i \in [\![1,d]\!]\}$. Il faut remarquer que par intégration composante par composante, on a :

$$\varphi(x) = (-1)^d \int_{Q(x)} (L\varphi)(y)dy.$$

En particulier, $|\varphi(x)| \leq \int_Q |(L\varphi)(y)|dy$, ce qui donne la deuxième inégalité.

D'autre part, par le théorème des accroissements finis (dans la direction x_i), on a que pour chaque $i \in [\![1,d]\!]$:

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq a\|\partial_{x_i}\varphi\|_{L^\infty}.$$

On en déduit $\|\partial_{x_j}\varphi\|_{L^\infty} \leq a^{d-1}\|L\varphi\|_{L^\infty}$. Puis, par une récurrence immédiate, pour tout $|\beta| \leq m$,

$$\|\partial^\beta\varphi\|_{L^\infty} \leq a^{(d-1)|\beta|}\|L^{|\beta|}\varphi\|_{L^\infty}.$$

Finalement, en utilisant encore une fois que $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq a^d\|L\varphi\|_{L^\infty}$, on voit que si $|\beta| \leq m$, alors

$$\|L^{|\beta|}\varphi\|_{L^\infty} \leq a^{d(m-|\beta|)}\|L^m\varphi\|_{L^\infty},$$

et ainsi

$$\|\varphi\|_m \leq C a^{dm} \|L^m \varphi\|_{L^\infty}.$$

2. On a vu en 1. que $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq a^d \|L\varphi\|_{L^\infty}$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_Q^\infty(\Omega)$, donc $L : \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ est injective, et donc $L^{m+1} : \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ également, ce qui justifie la définition.

K étant compact, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m.$$

On choisit ce m. Si $\psi = L^{m+1}\varphi$, alors

$$|\langle \tilde{T}_m, \psi \rangle| = |\langle \tilde{T}_m, L^{m+1}\varphi \rangle| = |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_m \leq C C_m \int_Q |L^{m+1}\varphi| dx \leq C C_m \int_K |\psi(x)| dx.$$

(remarquons que $\mathrm{supp}(\psi) \subset \mathrm{supp}(\varphi) \subset K$) : le m choisi convient.

3. Le théorème de Hahn-Banach s'applique en voyant $\tilde{T}_m$ comme une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel de $L^1(K)$: elle s'étend en une forme linéaire continue sur $L^1(K)$, que l'on note encore $\tilde{T}_m$.

$\tilde{T}_m$ se réalise alors (par dualité) comme un élément de $L^\infty(K)$, i.e. il existe $g \in L^\infty(K)$ tel que :

$$\forall \psi \in L^1(K), \langle \tilde{T}_m, \psi \rangle = \int_K g\psi.$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, on a :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_m, L^{m+1}\varphi \rangle = \int_K g(L^{m+1}\varphi).$$

On prolonge g par 0 en dehors de K et on définit

$$f(x) := \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} g(y) dy.$$

Alors $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, et n intégrations par parties donnent :

$$\langle T, \varphi \rangle = (-1)^n \int f(x)(L^{m+2}\varphi)(x) dx.$$

Ceci est exatement ce que l'on veut, avec $\alpha = (m+2, \dots, m+2)$.

4. Il existe un ouvert U tel que $K \subset U \subset \bar{U} \subset V$. On applique le résultat précédent. Il existe une fonction f contine sur Ω telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_U^\infty(\Omega), \quad \langle T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(\partial^\alpha \varphi)(x) dx. \tag{1}$$

La constuction du 3. assure que $\alpha_i \leq m+2$ pour chaque $i \in [\![1, d]\!]$.

Quitte à multiplier f par une fonction continue à support dans V valant 1 sur $\bar{U}$ (cela ne modifie par (1)), on peut supposer que f est à support dans V.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction à support dans U, valant 1 sur un voisinage ouvert de K. Alors par (1) (et la formule de Leibniz), on a : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle T, \varphi \rangle &= \langle T, \chi\varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \partial^\alpha(\chi\varphi)(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} \partial^{\alpha-\beta}\chi \partial^\beta \varphi,\end{aligned}$$

ce qui est ce que l'on veut, avec

$$f_\beta = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_{\alpha\beta} f \partial^{\alpha-\beta}\chi.$$

5. Il existe des compacts K_i (en nombre dénombrable) et des ouverts V_i tels que $K_i \subset V_i \subset \Omega$, $\cup_i K_i = \Omega$, et tout compact de Ω n'intersecte qu'un nombre fini de V_i. Par exemple, si $(Q_i)_i$ est une suite exhaustive de compacts de Ω ($Q_i \subset \mathring{Q}_{i+1}$ et $\cup_i Q_i = \Omega$), on peut poser $K_i = Q_{i+1} \setminus \mathring{Q}_i$ et $V_i = \mathring{Q}_{i+2} \setminus Q_{i-1}$).

On associe à cette décomposition une partition de l'unité ψ_i ($\mathrm{supp}(\psi_i) \subset V_i$ et $\sum_i \psi_i = 1$, la somme étant localement finie). On peut donc appliquer le résultat précédent à chaque $\psi_i T$: il existe un nombre fini de fonctions continues $f_{i,\alpha}$ à support dans V_i telles que :

$$\psi_i T = \sum_\alpha \partial^\alpha f_{i,\alpha}.$$

On pose $f_\alpha = \sum_{i=1}^\infty f_{i,\alpha}$, où les sommes sont localement finies (vu le choix des V_i). Ainsi, f_α est continue sur Ω, et le deuxième point est vérifié.

Enfin, comme $\varphi = \sum_i \psi_i \varphi$ (pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), et que la somme a un nombre fini de termes non nuls, on a $T = \sum_i \psi_i T = \sum_\alpha \partial^\alpha f_\alpha$.

Si l'ordre de T est fini et vaut m, alors par 4., pour tout V_i, $\psi_i T$ est à support compact (inclus dans V_i) et d'ordre m. Par conséquent, pour tout α tel que $|\alpha| > d(m+2)$, on peut choisir $f_{i,\alpha} = 0$, et donc $f_\alpha = 0$.

⋆