Correction du Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Semi-groupes et EDP

Séance du 2 mai 2014

Solution 1. *Préliminaires*

1. Il est clair par le théorème de Cauchy-Lipschitz que X est bien définie pour tout (t, x) et est injective par rapport à x. Le théorème de dépendance par rapport à un paramètre nous donne que $X(t, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

On calcule son inverse de la façon suivante. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}$, soit Y la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t}(t, y) = f(t, Y(t, y)) \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ Y(t, y) = y \text{ dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Alors par unicité, on a clairement $X(s, Y(0, y)) = Y(s, y)$ car ces deux fonctions de s vérifient la même équation et ont la même valeur en $s = 0$. Donc $X(t, \cdot)^{-1}(y) = Y(0, y)$ car $X(t, Y(0, y)) = y$. Les mêmes arguments que précédemment nous donne que $X(t, \cdot)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, X(t, x)) = (\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{\partial X}{\partial t})(t, X(t, x)) = 0.$$

Donc $u(t, X(t, x)$ ne dépend pas de t, ce qui donne la conclusion.

3. Une telle solution est nécessairement $u(t, x) = u_0(X(t, \cdot)^{-1}(x))$.

4. On vérifie que $\int v(s, t, x) ds$ est bien solution :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t v(s, t, x) ds &= v(t, t, x) + \int_0^t \partial_t v(s, t, x) ds \\ &= h(t, x) - \int_0^t f(t, x) \partial_x v(s, t, x) ds \\ &= h(t, x) - f(t, x) \partial_x \int_0^t v(s, t, x) ds. \end{aligned}$$

⋆

Solution 2. *Somme de générateurs*

1. Comme A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E, il existe λ_0 tel que pour $\lambda \geq \lambda_0$, $A + \lambda : \mathcal{D}(A) \to E$ soit bijective et

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

Alors

$$\|B(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{\|B\|}{|\lambda|} < 1$$

pour $\lambda > \|B\|$. Donc pour $\lambda > \max(\lambda_0, \|B\|)$, $I + B(A + \lambda)^{-1}$ est inversible.

2. Soit $f \in E$. Pour λ assez grand, il existe v unique tel que $v + B(A+\lambda)^{-1}v = f$.Cela équivaut, si on pose $u = (A+\lambda)^{-1}v$ à u est solution de

$$(\lambda + A + B)u = f.$$

On a alors

$$\|u\| = \|(A+\lambda)^{-1}v\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|v\|.$$

Comme v satisfait $v + B(A+\lambda)^{-1}v = f$ on a

$$\|v\| \leq \|f\| + \|B(A+\lambda)^{-1}\|\|v\|,$$

donc

$$\|v\| \leq \frac{\|f\|}{1 - \frac{\|B\|}{\lambda}}$$

et on obtient

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda - \|B\|}\|f\|.$$

Ceci implique que $A + B$ génère un semi-groupe $S(t)$ (qui n'est pas forcément un semi-groupe de contractions). En reprenant la preuve du fait que $A+B$ génère un semi-groupe, on obtient

$$\|S(t)\| \leq e^{t\|B\|}$$

$\star$

Solution 3. *Equation cinétique*

1. On vérifie aisément $S(0) = I$ et $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$ et

$$\|S(t)v\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$$

On calcule ensuite

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)f - f}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x-tv, v) - f(x,v)}{t} = v.\nabla_x f(x,v)$$

Le domaine du générateur infinitésimal est $\mathcal{D}(A) = \{f \in L^p, v.\nabla_x f \in L^p\}$

2. Les opérateurs

$$B_1 : f \in L^p \mapsto m(x,v)f \in L^p,$$

$$B_2 : f \in L^p \mapsto \int \sigma(w)f(x, v-w)dw \in L^p$$

sont bornés, avec $\|B_1\| \leq \|m\|_{L^\infty}$ et $\|B_2\| \leq \|\sigma\|_{L^1}$. D'après l'exercice précédent, $v.\nabla_x + B_1 + B_2$ est donc le générateur infinitésimal d'un semi-groupe sur L^p.

3. Soit f solution de

$$\partial_t f + v.\nabla_x f + m(x,v)f + \int \sigma(w)f(t,x,v-w)dw = 0$$

Alors

$$\partial_t f + v.\nabla_x f + (m(x,v) - a)f + af + \int \sigma(w)f(t,x,v-w)dw = 0$$

donc, si on pose $g = e^{at} f$, g satisfait

$$\partial_t g + v.\nabla_x g + (m(x,v) - a)g + \int \sigma(w) g(t,x,v-w)dw = 0$$

Soit R le semi-groupe associé à $v.\nabla_x g + (m(x,v) - a)g + \int \sigma(w)g(t,x,v-w)dw$. D'après l'exercice précédent, on a

$$\|R(t)\| \leq e^{t(\|m-a\|_{L^\infty} + \|\sigma\|_{L^1})} \leq e^{t(b+\|\sigma\|_{L^1}}$$

Donc

$$\|f(t,.,.)\|_{L^p} \leq e^{-at} e^{t(b+\|\sigma\|_{L^1})} \|f_0\|_{L^p}.$$

On obtient le résultat souhaité si $b + \|\sigma\|_{L^1} < a$.

⋆

Solution 4. *Comportement en temps grand de solutions de l'équation de la chaleur*

1. Si u_1 et u_2 sont deux solutions, alors $v = u_1 - u_2$ satisfait

$$\partial_t v - \Delta v = 0$$

avec $v(x,t) = 0$ sur $\partial\Omega \times [0,\infty)$ et $\Omega \times \{0\}$. On a donc

$$\partial_t \int_\Omega v^2 + \int |\nabla v|^2 = 0$$

donc $\int_\Omega v^2$ est décroissante. Comme $\int_\Omega v(0,x)^2 = 0$, v est nulle presque partout.

2. Voir le cours

3. De même que dans la question 1, on montre que $t \mapsto \|v(t,.)\|_{L^2}$ est décroissante. De plus en intégrant aussi par rapport à t on obtient

$$\int_\Omega v^2(T,x)dx - \int_\Omega v^2(0,x)dx + \int_0^T \int |\nabla v|^2 = 0$$

donc

$$\int_0^T \int |\nabla v|^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2$$

et en faisant tendre T vers ∞ on obtient le résultat souhaité.

4. On calcule

$$\begin{aligned}\partial_t \int |\nabla v|^2 dx &= 2 \int \nabla v . \nabla \partial_t v \\ &= -2 \int \Delta v \partial_t v + \int_{\partial\Omega} \partial_n v \partial_t v \\ &= -2 \int (\partial_t v)^2 \leq 0\end{aligned}$$

Donc $t \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$ est décroissante. Comme elle est de plus intégrable en temps, on a $\lim_{t\to\infty} \|\nabla v(t,.)\|^2 = 0$.

5. Ω est borné, et $v \in H_0^1(\Omega)$ donc l'inégalité de Poincaré nous donne

$$\|v\|_{L^2} \leq C(\Omega) \|\nabla v\|_{L^2}$$

donc $v \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ donc $u \to u^*$.

⋆