Correction du Td n° 9 d'Analyse fonctionnelle

Distributions et convolution

Séance du 9 avril 2015

Solution 1. *Distributions qui sont régulières*

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans L^p ($p < \infty$) (considérer la régularisation par convolution avec une approximation de l'identité), donc $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ peut etre étendue à en $\tilde{T}$ application continue $L^p \to \mathbb{R}$ (avec la meme inégalité). Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in L^q$ telle que $\tilde{T}(\phi) = \int f\phi$ pour tout $\phi \in L^p$, donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En identifiant, on obtient $T = T_f$.

2. On essaye d'appliquer le résultat précédent. Comme pour la primitivation d'une distribution, on introduit $\chi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, $\int \chi = 1$ et $\chi \geq 0$. Soit donc $\phi \in \mathcal{D}(]0,1[$. Alors il existe $\psi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $\phi = \psi' + \left(\int \phi\right)\chi$. Ainsi :

$$T(\phi) = T(\psi') + \left(\int \phi\right) T(\chi) = -\int f\psi + \left(\int \phi\right) T(\chi).$$

Mais $T(\chi)$ est une constante C et $|\int \phi| \leq \|\phi\|_{L^2}$ (par Holder). Enfin, $\left|\int f\psi\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$. Il reste donc à estimer $\|\psi\|_{L^2}$ en fonction de ϕ. Pour cela, on a :

$$\psi^2(x) = 2\int_0^x \psi'(t)\psi(t)dt \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}.$$

Quand on intègre en x, entre 0 et 1, on obtient $\|\psi\|_{L^2}^2 \leq 2\|\psi'\|_{L^2}\|\psi\|_{L^2}$, d'où $\|\psi\|_{L^2} \leq 2\|\psi'\|_{L^2}$. Et donc :

$$\|\psi\|_{L^2} \leq 2\left\|\phi - \left(\int \phi\right)\chi\right\|_{L^2} \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2})\|\phi\|_{L^2}.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$|T(\phi)| \leq 2(1 + \|\chi\|_{L^2} + |T(\chi)|)\|\phi\|_{L^2}.$$

Par 1., T s'identifie à $u \in L^2(]0,1[)$.

Ensuite, considérons $v \in C^1([0,1])$ avec $v(0) = 0$. Alors :

$$|v^2(x)| = 2\left|\int_0^x v'(t)v(t)dt\right| \leq 2\|v\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}.$$

Donc $\|v\|_{L^\infty} \leq 2(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})$. On raisonne maintenant par densité : $\mathcal{D}$ est dense dans L^2, soit donc $v_n \in \mathcal{D}(]0,1[)$ telle que $v_n \to f$ dans L^2. En reprenant les estimées précédentes, on voit $u_n(x) = \int_0^x v_n(t)dt$ est de Cauchy dans $L^2(]0,1[)$, puis $C^0([0,1])$, donc converge vers $\tilde{u}$. Par continuité de la dérivation au sens des distributions, on a que $\tilde{u}' = \lim_{n\to\infty} v_n = f$. Donc $\tilde{u}$ et u diffèrent d'une constante (primitivation d'une distribution), et $u \in C^0([0,1])$.

3. L'hypothèse s'écrit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, :

$$\int f\phi + T(\phi') = 0.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}$, positive, telle que $\int \chi = 1$. On définit g la primitive de f telle que $\int g\chi = T(\chi)$ (g est C^1). Alors on a également, par intégration par partie $\int f\phi + T_g(\phi') = 0$. On en déduit que pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $(T - T_g)(\phi') = 0$. Pour $\psi \in \mathcal{D}$, $\int(\psi - (\int \psi)\chi) = 0$, donc si $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x}(\psi - (\int \psi)\chi)$, $\phi \in \mathcal{D}$ et $\phi' = \psi - (\int \psi)\chi$. Vu ce qui précède :

$$(T - T_g)(\psi) = \int \psi \cdot (T - T_g)(\chi) = 0.$$

Donc finalement, $\forall \psi \in \mathcal{D}, (T - T_g)\psi = 0$. On en déduit que $T = T_g$, et par définition $g' = f$.

4. $g(x) = \exp(-\int_0^x a(t)dt)$ est une fonction C^∞, on peut donc calculer :

$$(gu)'(\phi) = -gu(\phi') = -u(g\phi') = u(g'\phi - (g\phi)').$$

Mais $g' = -ag$, donc : $u(g'\phi - (g\phi)') = au(g\phi) + u'(g\phi) = fg\phi$, donc $(gu)'$ s'identifie à la fonction continue fg, et donc gu s'identifie à une fonction C^1. Comme g ne s'annule jamais, u est C^1.

⋆

Solution 2. *Petit calculs de convolutions*

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$< H', \phi >= - < H, \phi' >= -\int_0^\infty \phi'(x) = \phi(0).$$

2. • δ_a est à support compact, il n'y a pas de problème pour calculer :

$$(\delta_a * H)' = (\delta_a * \delta_0) = \delta_a,$$

donc $(\delta_a * H)(x) = \mathbb{1}_{x \geq a}$. On peut aussi remarquer que $(\delta_a * \psi)(x) = \psi(x - a)$.

• On calcule : $\delta' * \mathbb{1} = (\delta * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Il faut remarquer que si $m > n$, $x^m \delta_0^{(n)} = 0$ (calcul sur une fonction test). Par ailleurs, on calcule pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}(x^m\delta_0^{(n)}, \psi) &= (\delta_0^{(n)}, x^m\psi(x)) = (x^m\psi)^{(n)}(0) \\ &= (-1)^n C_n^m m! \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^n A_n^m \psi^{(n-m)}(0) = (-1)^m A_n^m (\delta_0^{(n-m)}, \psi).\end{aligned}$$

Et ainsi, $x^m \delta_0^{(n)} = (-1)^m A_n^m \delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors que :

$$x^m\delta_0^{(n)} * x^p\delta_0^{(q)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} = (-1)^{m+p} A_n^m A_q^p \delta_0^{(n+q-m-p)}.$$

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'$, il n'y a pas de problème. Ensuite :

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}'_{[a,b]} * \mathbb{1}'_{[c,d]} = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$ donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• $T * \mathbb{1}$ est une distribution bien définie car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$(T * \mathbb{1}, \psi) = (T, \check{\mathbb{1}} * \psi) = (T, \mathbb{1} * \psi) = \int \psi \cdot (T, \mathbb{1}).$$

Ainsi, $T * \mathbb{1} = (T, \mathbb{1})\mathbb{1}$ est une distribution constante.

• $T * \exp$ est bien définie comme précédemment. On calcule :

$$(T * \exp, \psi) = (T, \check{\exp} * \psi) = (T, x \mapsto \int \exp(y - x)\psi(y)dy)$$
$$= \int \psi(y)e^y dy(T, \exp(-x)).$$

Et donc $T * \exp = (T, \exp(-x)) \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T * \exp)' = T * \exp$, donc on a que $T * \exp = C \exp$. Ensuite, on calcule :

$$C = (T * \exp)(0) = (T, \check{\exp}) = (T, \exp(-x)).$$

3. $(\mathbb{1} * \delta') * H = 0 * H = 0$ et $\mathbb{1} * (\delta' * H) = \mathbb{1} * \delta = \mathbb{1}$. Ainsi, si deux des trois distributions ne sont pas à support compact, on n'a pas nécessairement l'associativité de la convolution.

4. On veut en fait :

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - u(\cdot - 1) = \delta'_0.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta'_k.$$

Calculons alors $\delta'_a * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^n \delta'_k$, alors :

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Comme $T_n \rightharpoonup u$, $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Solution 3. *Fonction test*

1. On a $(u * H_a)' = \frac{1}{a} u * (\delta - \delta_a) = \frac{1}{a}(u(x) - u(x - a))$, donc si $u \in C^k$ alors $u * H_a \in C^{k+1}$.

2. On a $\int u * H_a dx = \int u(y) H_a(x - y) dx dy = \int u(y)$, car $\int H_a(x - y) dx = 1$.

3. Il suffit de vérifier que $H_{a_0} * H_{a_1}$ est continue, et d'appliquer la question 1. Le support de $H_{a_0} * ... * H_{a_n}$ est inclus dans la somme des supports, c'est à dire dans $[0, a_0 + ... + a_n]$.

4. On calcule

$$(H_{a_0} * ... * H_{a_n})^{(j)} = \frac{1}{a_0 ... a_{j-1}} (\delta - \delta_{a_0}) * .. * (\delta - \delta_{a_{J-1}}) * H_{a_j} * ... * H_{a_n}.$$

On a donc 2^j termes de la forme

$$\delta_a * H_{a_j} * ... * H_{a_n},$$

or $\|H_{a_j} * ... * H_{a_n}\|_{L^\infty} \leq \|H_{a_j}\|_{L^\infty} \|H_{a_{j+1}} * .. * H_{a_n}\|_{L^1}$ et on a $\|H_{a_{j+1}} * .. * H_{a_n}\|_{L^1} = 1$ d'après la question 2 et $\|H_{a_j}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{a_j}$.

5. On montre d'abord que u_n est de Cauchy dans L^infty.

$$\begin{aligned}|u_n - u_{k+n}| &= |u_n - u_n * H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}| \\ &= |\int H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}(y)(u_n(x-y) - u_n(x))dy| \\ &\leq \int H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}(y)\|u_n'\|_{L^\infty}|y|dy\end{aligned}$$

Comme sur le support de $H_{a_{n+1}} * ... * H_{a_{n+k}}$ on a $|y| \leq a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ on obtient

$$|u_n - u_{k+n}| \leq \frac{2}{a_0 a_1}(a_{n+1} + ... + a_{n+k}).$$

Comme la somme des a_i est convergente, u_n est de Cauchy dans L^∞. On procède de la même manière pour les dérivées. u_n converge donc uniformément vers une fonction C^∞, à support dans $[0, \sum a_i]$. L'intêret de cette construction est de nous donner des bornes sur les dérivées de u.

6. Une telle fonction serait analytique, ce qui empêche d'être à support compact.

7. Soit ϕ une fonction plateau. On pose $g_n = b_n \phi(\frac{x}{\epsilon_n})\frac{x^n}{n!}$. On veut montrer que pour ϵ_n assez petit, et $\alpha < n$

$$\|g_n^{(\alpha)}\| \leq 2^{-n}$$

Sur $\mathbb{R} -]-\epsilon_n; \epsilon_n[$, g_n est identiquement nulle donc l'inégalité est vérifiée. Il suffit de montrer que, pour ϵ_n assez petit, elle est aussi vérifiée sur $]-\epsilon_n; \epsilon_n[$.

Par la formule de dérivée des produits :

$$g_n^{(\alpha)}(x) = b_n \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \frac{1}{\epsilon_n^s} \phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right) \frac{x^{n-(\alpha-s)}}{(n-(\alpha-s))!}$$

Donc, lorsque $|x| < \epsilon_n$:

$$|g_n^{(\alpha)}(x)| \leq |b_n| \epsilon_n^{n-\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{s} \left|\phi^{(s)}\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)\right| \frac{1}{(n-\alpha+s)!}$$

La fonction $\phi^{(s)}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle est à support compact). Pour tout $\alpha < n$, le terme précédent tend donc vers 0 uniformément en x lorsque $\epsilon_n \to 0$. En particulier, si on choisit ϵ_n asse petit, on peut avoir $||g_n^{(\alpha)}||_\infty \leq 2^{-n}$ pour tout $\alpha < n$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n g_n^{(\alpha)}$ converge alors normalement. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout α :

$$\begin{aligned} & f^{(\alpha)} = \sum_n g_n^{(\alpha)} \\ \Rightarrow \quad & f^{(\alpha)}(0) = g_\alpha^{(\alpha)}(0) = b_\alpha \end{aligned}$$

En effet, pour tout n, $g_n(x) = b_n \frac{x^n}{n!}$ au voisinage de 0 donc $g_n^{(\alpha)}(0) = b_n$ si $\alpha = n$ et 0 sinon.

⋆

Solution 4. *Equations différentielles*

1. L'application $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est propre. Donc la convolution de deux éléments de $\mathcal{D}'_+$ est bien définie. De plus si $u, v \in \mathcal{D}'_+$ alors le support de $u * v$ est inclus dans l'image de F, c'est à dire dans $\mathbb{R}^+$.

2. Il suffit de faire le cacul :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\ &= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda(H(t)e^{\lambda t} \\ &= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda(H(t)e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. On pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence :

$$\begin{aligned}(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) &= \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) \\ = \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} &+ H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} = H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!}.\end{aligned}$$

Ce qui assure l'hérédité de la récurrence.

4. On considère l'EDO $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = \delta_0$. Alors on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme :

$$\left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0.$$

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc :

$$\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k} = \bigstar_i(\delta' - \lambda_i\delta)^{n_i}.$$

On conclut donc que :

$$u = \left(\sum_k a_k(-\delta_0')^{*k}\right)^{*-1} = \bigstar_i\left(H(t)\frac{t^{n_i-1}e^{\lambda_i t}}{(n_i-1)!}\right).$$

$\star$

Solution 5. *Propriété de la moyenne*

1. On a que $f(x+th) = f(x) + tdf(x).h + \frac{t^2}{2}d^2f(x+\tau h)(h,h)$ avec $\tau \in]0,t[$ (développement de Taylor-Lagrange, ordre 2). Maintenant, en fixant $t = 1$, comme $h \mapsto f(x)$ et $h \mapsto df(x).h$ vérifient la propriété de la moyenne, on a pour tout r :

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|}\int d^2f(x+\tau(\sigma)\sigma)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Mais $d^2f(x+\tau(\sigma)\sigma) \to d^2f(x)$ uniformément quand $r \to 0$ (par continuité de d^2f, donc on a :

$$\int_{\partial B(0,r)} d^2f(x)(\sigma,\sigma)d\sigma = 0.$$

Il exsite une base orthonormale dans laquelle la matrice de $d^2f(x)$ est diagonale, $d^2f(x) = diag(a_1, \dots, a_n)$. Dans cette base, l'égalité s'écrit, par homogéénité

$$0 = \int_{\|h\|=1} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i^2 dh_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \int_{\|h\|=1} h_1^2 dh_i = CTr(d^2f(x)).$$

Finalement, on trouve que $Tr(d^2f(x)) = \Delta f = 0$.

2. Soit ϕ_n une approximation de l'identité à support compact. On pose $f_n = \phi_n * f$. Alors f_n est $\mathcal{C}^\infty$ et satisfait la propriété de la moyenne. En effet, on calcule pour $x = 0$

$$\frac{1}{|\partial B(0,r)|} \int f_n(s)ds = \frac{1}{|\partial B(0,r)|} \int\int \phi_n(y)f(s-y)dyds = \int \phi_n(y)f(s-y)dy = f(0).$$

On a donc d'après la question précedente $\Delta f_n = 0$ et donc pour tout $0 = \phi_n * \Delta f \longrightarrow \Delta f$ au sens des distributions, donc $\Delta f = 0$ au sens des distributions.

3. Soit donc $f \in \mathcal{C}^\infty$ tel que $\Delta f = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{B(0,r)} f\Delta(|x|^2 - r) = 2n \int f(x) \\ = \int_{\partial B(0,r)} 2rfds - \int_{\partial B(0,r)} (|x|^2 - r^2)\partial_n f ds.\end{aligned}$$

On étudie ensuite la fonction $F : r \mapsto \frac{1}{|B(0,r)|} f dx$. Le calcul précédent nous donne $F'(r) = 0$ donc $F(r) = f(0)$. L'expression de F' nous donne ensuite la propriété de la moyenne.

4. Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'$ tel que $\Delta T = 0$ au sens des distributions.On a alors $\phi_n * T \in C^\infty$ et $\Delta(\phi_n * T) = \phi_n * \Delta T = 0$. Le calcul précédent nous dit donc que $\phi_n * T$ satisfait la propriété de la moyenne, $\phi_n * T \longrightarrow T$ au sens des distributions. Notons $f_n = \phi_n * T$.

$$\begin{aligned}< f_n, \phi_{x,r} > &= \int \psi(\frac{\rho}{r} f_n(x + \rho\omega)\rho^{n-1} d\rho d\omega \\ &= \int \psi(\frac{\rho}{r}) f_n(x)\rho^{n-1} d\rho d\omega \\ &= f_n(x)\|\phi_{x,r}\|_{L^1}\end{aligned}$$

En passant à la limite $n \longrightarrow \infty$ on obtient donc $f_n(x) \longrightarrow \frac{1}{\|\phi_{x,r}\|_{L^1}} < T, \phi_{x,r} >$. La convergence est uniforme sur les compacts car $< f_n, \phi_{x,r} >=< T, \phi_n * \phi_{x,r} >$ et $\phi_n * \phi_{x,r}$ convege vers $\phi_{x,r}$ uniformément en x pour chaque norme $\mathcal{C}^k$.

⋆