Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n$^{\text{o}}$ 9

VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN

Séance du 27 mars 2017

Solution 1. *Inégalité de Poincaré*

1. En notant que $u(a) = 0$, on écrit

$$|u(x)|^2 = \int_a^x 2\,\mathrm{Re}(\overline{u(s)}u'(s))ds \leq \int_a^x 2|u(s)||u'(s)|ds \leq 2\|u\|_{L^2(]a,b[)}\|u'\|_{L^2(]a,b[)},$$

donc en intégrant sur $[a,b]$, on obtient ensuite

$$\|u\|^2_{L^2(]a,b[)} \leq 2|b-a|\|u\|_{L^2(]a,b[)}\|u'\|_{L^2(]a,b[)},$$

et donc $\|u\|_{L^2(]a,b[)} \leq 2|b-a|\|u'\|_{L^2(]a,b[)}$.

2. Si maintenant $u \in \mathcal{C}^\infty(]a,b[\times\mathbb{R}^{d-1})$ est à support compact, on a, d'après la question précédente, pour tout $y \in \mathbb{R}^{d-1}$ fixé,

$$\int_a^b |u(x,y)|^2 dx \leq 4|b-a|^2 \int_a^b |\partial_x u(x,y)|^2 dx,$$

donc en intégrant sur $\mathbb{R}^{d-1}$, on obtient le résultat souhaité. On élargit ensuite à toutes les fonctions de H_0^1 grâce à la densité de telles fonctions u.

⋆

Solution 2. *Diagonalisation du Laplacien de Dirichlet*

1. Introduisons la forme sesquilinéaire $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$. Elle est continue sur H_0^1 (d'après Cauchy-Schwarz), et coercitive, d'après l'inégalité de Poincaré (on a $a(u,u) \geq c\|u\|^2_{L^2}$). On peut donc appliquer à a le théorème de Lax-Milgram (dans l'espace H_0^1), ce qui nous donne, pour chaque $f \in L^2(\Omega)$, l'existence d'un unique $u \in H_0^1$ tel que la forme linéaire $v \mapsto \int_\Omega f\bar{v}$ se représente par a, *i.e.*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f\bar{v}.$$

(En effet, $v \mapsto \int_\Omega f\bar{v}$ est bien une forme linéaire continue sur H_0^1.) Par définition, on note $u = -\Delta^{-1}f$.

Ici, on montre un lemme fort utile, et qui justifie cette notation :

Lemme. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ tel que $u = -\Delta^{-1}f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $-\Delta u = f$.*

Démonstration. La preuve consiste en une simple intégration par partie : soit $v \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact. On a

$$\int_\Omega f\bar{v} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = -\int_\Omega (\Delta u)\bar{v},$$

sans termes de bord puisque $v|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Grace à la densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans L^2, on en déduit que $-\Delta u = f$. □

2. En appliquant la formule de la question précédente à $v = u$, on trouve

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2},$$

donc d'après l'inégalité de Poincaré, $\|\nabla u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, c'est-à-dire que (par Poincaré à nouveau)

$$\|u\|_{H_0^1} \leq C\|f\|_{L^2}.$$

Cela prouve donc que l'application $-\Delta^{-1}$ est continue de L^2 dans H_0^1. Comme l'injection de H_0^1 dans L^2 est compacte, l'application $-\Delta^{-1} : L^2 \to L^2$ est compacte.

Soient $f, g \in L^2$. En appliquant la définition de solution faible à f, on obtient

$$\int_\Omega f\overline{(-\Delta^{-1}g)} = \int_\Omega \nabla(\Delta^{-1}f) \cdot \nabla(\Delta^{-1}g), \tag{1}$$

puis en inversant les rôles et en conjuguant, on obtient

$$\int_\Omega f\overline{\Delta^{-1}g} = \int_\Omega (\Delta^{-1}f)\bar{g},$$

ce qui prouve que $-\Delta^{-1}$ est autoadjoint. Par ailleurs, on voit en prenant $f = g$ dans (1) que $-\Delta^{-1}$ est également positif.

3. $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable ; $-\Delta^{-1}$ est autoadjoint compact positif ; donc il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de $L^2(\Omega)$, et une suite μ_n décroissant vers 0 telle que

$$-\Delta^{-1}e_n = \mu_n e_n.$$

Or l'opérateur $-\Delta^{-1}$ est injectif, grâce au lemme. En effet, si $-\Delta^{-1}f = 0$, alors $f = -\Delta(-\Delta^{-1}f) = 0$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \neq 0$; en particulier, $\{\mu_n\}$ ne stationne pas à 0.

Cela permet de poser $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$, et donc (toujours grâce au lemme) $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$, avec $\lambda_n \to +\infty$.

⋆

Solution 3. *Autour de la première valeur propre du Lapalcien*

1. L'idée est de construire à partir de $\{e_n\}$ (la base de L^2 vue à l'exercice précédent) une base hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$. Observons que si $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla e_m = \int_\Omega \lambda_n \nabla(-\Delta^{-1}e_n) \cdot \nabla e_m = \lambda_n \int_\Omega e_n\overline{e_m} = \lambda_n \delta_{n,m}.$$

Ainsi, si nous posons $\tilde{e}_n := (1+\lambda_n)^{-1/2}e_n$, nous obtenons une famille orthonormée de H_0^1. Montrons que l'espace qu'elle engendre est dense, ou plutôt que son orthogonal est réduit à $\{0\}$. Soit $f \in H_0^1$ orthogonale à tous les $\tilde{e}_n$, au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de H_0^1. (Nous détaillons ici l'approximation de f que nous ne faisons pas ailleurs.) Pour $\varepsilon > 0$, soit $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \varepsilon$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega f\overline{e_n}\right| &\leq \left|\int_\Omega f_\varepsilon\overline{e_n}\right| + \varepsilon \\
&= \frac{1}{1+\lambda_n}\left|\int_\Omega f_\varepsilon(\overline{e_n - \Delta e_n})\right| + \varepsilon \\
&= \frac{1}{1+\lambda_n}\left|\int_\Omega f_\varepsilon\overline{e_n} + \nabla f_\varepsilon \cdot \nabla e_n\right| + \varepsilon \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_n}}\left|\langle f_\varepsilon - f, \tilde{e}_n\rangle\right| + \varepsilon \\
&\leq C_n\varepsilon.
\end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on voit que f est orthogonale à e_n au sens de $L^2(\Omega)$. Comme $\{e_n\}$ est une base hilbertienne de L^2, on a donc $f \equiv 0$. Cela prouve que $\{\tilde{e}_n\}$ est une base hilbertienne de H_0^1.

Soit une fonction $u \in H_0^1$ telle que $\|u\|_{L^2} = 1$. On peut écrire $u = \sum_n u_n \tilde{e}_n$ (où la convergence de la série a lieu dans H_0^1). Remarquons qu'alors

$$\nabla u = \sum_n u_n \nabla \tilde{e}_n,$$
$$u = \sum_n \frac{u_n}{\sqrt{1+\lambda_n}} e_n,$$

avec convergence dans L^2. La première inégalité vient de ce que $\nabla : H_0^1 \to L^2$ est continu, et puisque $\|u\|_{L^2} = 1$, la seconde implique aussi que

$$\sum_n \frac{|u_n|^2}{1+\lambda_n} = 1.$$

On peut à présent calculer

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_{n,m} u_n \overline{u_m} \int_\Omega \nabla \tilde{e}_n \cdot \nabla \tilde{e}_m = \sum_n \lambda_n \frac{|u_n|^2}{1+\lambda_n} \geq \sum_n \lambda_1 \frac{|u_n|^2}{1+\lambda_n} = \lambda_1.$$

L'égalité a lieu si et seulement si toutes les composantes u_n le long des e_n non associés à λ_1 sont égales à 0, *i.e.* lorsque $u \in E_{\lambda_1}$. On a donc bien $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{\|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$.

De plus, la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré est donnée par

$$C = \sup_{\substack{v \in H_0^1 \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_{L^2}}{\|\nabla v\|_{L^2}} = \sup_{\substack{u \in H_0^1 \\ \|u\|_{L^2}=1}} \frac{1}{\|\nabla u\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}.$$

2. Observons que

$$m_{x_0}(t) = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{S(0,1)} g(x_0 + ty) d\sigma(y),$$

de sorte que, par la formule de Green,

$$\begin{aligned} m'_{x_0}(t) &= \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{S(0,1)} \nabla g(x_0+ty) \cdot y d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{|S(0,1)|} \left(\int_{B(0,1)} \Delta g(x_0+ty) + \int_{B(0,1)} \nabla g(x_0+ty) \cdot \nabla 1 \right) \\ &= -\frac{1}{|S(0,1)|} \int_{B(0,1)} -\Delta g(x_0+ty) \leq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $t \mapsto m_{x_0}(t)$ est décroissante en t.

3. En utilisant la continuité de g en x_0, nous voyons aussi que $m_{x_0}(t) \to g(x_0)$ quand $t \to 0$. Ainsi, si $x_0 \in \Omega$ est un minimum local de g, alors cela oblige g à être localement constante sur un voisinage de x_0.

Dès lors, si g est comme dans l'énoncé, notons g_0 sa valeur minimale sur le compact $\overline{\Omega}$, et introduisons $W := \{x \in \Omega \mid g(x) = g_0\}$. Comme g est continue, W est fermé, et d'après la remarque précédente, W est également ouvert. La connexité de Ω permet donc de dire que seuls deux cas se présentent :

— soit $W = \Omega$, et alors g est constante sur $\overline{\Omega}$; mais alors, nécessairement $g \equiv 0$, puisque par hypothèse, g est nulle au bord.

— soit $W = \emptyset$, et alors g n'atteint son minimum que sur $\partial\Omega$, ce qui signifie que $g_0 = 0$, et donc que $g > 0$ sur Ω.

4. Examinons la restriction T de l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$ à l'ensemble E des fonctions $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et nulles au bord. On voit que T est à valeurs dans E, et que T est compact (utiliser par exemple la formulation du problème de Dirichlet avec les fonctions de Green, vue en cours). D'autre part, T envoie le cône $\mathscr{C}$ des fonctions positives ou nulles sur Ω sur son intérieur strict, composé des fonctions strictement positives sur Ω (d'après la question précédente). Donc d'après le théorème de Krein-Rutman, la plus grande valeur propre de T est associée à un sous-espace propre de dimension 1, et le vecteur propre correspondant est dans l'intérieur de $\mathscr{C}$. Cela prouve que tout vecteur propre associé à λ_1 est de signe constant (à un angle complexe près) sur Ω.

5. Si $\Omega = B(0,1)$, pour toute rotation R, on peut s'assurer avec des coordonnées que $e_1 \circ R$ vérifie $-\Delta(e_1 \circ R) = (-\Delta e_1) \circ R = \lambda_1 e_1 \circ R$. Or d'après la question précédente, il existe $\lambda_R \in \mathbb{C}$ tel que $e_1 \circ R = \lambda_R e_1$. On a bien sûr $|\lambda_R| = 1$ (composer sinon l'égalité précédente avec elle-même jusqu'à obtenir une contradiction), donc $e_1 = \overline{\lambda_R} e_1 \circ R$ et donc $\lambda_R = 1$ (car on a fixé par convention que e_1 prend des valeurs positives). Ainsi, $e_1 = e_1 \circ R$, donc e_1 est à symétrie sphérique.

$\star$

Solution 4. *Estimation de Weyl*

1. Soit $V_n = \mathrm{Vect}(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ (voir l'exercice précédent pour la définition des $\tilde{e}_j$). Si $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tilde{e}_j$, et $\|u\|_{L^2} = 1$, on a $\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \sum_j \lambda_j |\alpha_j|^2 \|\tilde{e}_j\|_{L^2}^2 \leq \lambda_n$. D'autre part, en choisissant $u = e_n$, on voit que

$$\max_{\substack{u \in V_n \\ \|u\|_{L^2}=1}} \|\nabla u\|^2 = \lambda_n.$$

Maintenant, si V est un sous-espace de H_0^1 tel que $\dim(V) \geq n$, on considère $\Phi : V \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto (\langle v, \tilde{e}_1 \rangle, \dots, \langle v, \tilde{e}_n \rangle)$. Alors ou bien $\ker(\Phi) = \{0\}$, et dans ce cas $\mathrm{Im}(V) = \mathbb{C}^n$, donc il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\langle v, e_i \rangle = 0$ pour $i \leq n-1$; ou bien il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\Phi(v) = 0$. Dans les deux cas, un tel v satisfait

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \lambda_n \|v\|_{L^2}^2.$$

2. Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$, alors $H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$ (puisque toutes les fonctions lisses à support compact dans Ω_1 sont aussi à support compact dans Ω_2), donc grâce à la formule précédente, $\lambda_n(\Omega_1) \geq \lambda_n(\Omega_2)$. Cela implique bien sûr qu'en-dessous d'un certain réel λ, il y a plus de valeurs propres pour Ω_2 que pour Ω_1.

3. On considère que les fonctions sur $\Omega =]0,a[^d$ sont en fait périodiques de période a en toutes les variables. Cela permet d'utiliser la transformée de Fourier, et de trouver une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée des vecteurs

$$e_K(x) = e^{\frac{2i\pi}{a} K \cdot x} = \prod_{j=1}^d e^{\frac{2i\pi}{a} k_j x_j}, \quad K = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d.$$

Les vecteurs propres sont les $(x_1, \dots, x_d) \mapsto \sin(\pi k_1 x_1/a) \cdots \sin(\pi k d x_d/a)$, avec $k_i \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq d$, et les valeurs propres associées sont les

$$\frac{\pi^2}{a^2} \sum_{i=1}^d k_i^2.$$

4. $N_{]0,a[^d}(\lambda)$ est égal au nombre de points à coordonnées entières positives dans la boule de rayon $\sqrt{\lambda}\frac{a}{\pi}$. On a donc

$$N_{]0,a[^d}(\lambda) \sim \lambda^{\frac{d}{2}} \mathrm{vol}(B_{\mathbb{R}^d}(0,1)) \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d.$$

5. Pour $u, v \in H_0^1(\Omega_1)$, on note $u \oplus v$ l'élément de $H_0^1(\Omega_2)$ qui est donné par u sur $]0,a[^d$ et par v sur $(a, 0, .., 0)+]0,a[^d$. On considère le sous-espace de $H_0^1(\Omega_2)$, de dimension $2n$, engendré par les $e_i \oplus 0$, $0 \oplus e_i$ avec $i \leq n$. On a

$$\max_{\substack{u \in V, \\ \|u\|_{L^2}=1}} = \lambda_n$$

et donc $\lambda_{2n}(\Omega_2) \leq \lambda_n(\Omega_1)$.

6. Pour tout ouvert Ω_K composé de K petites briques de la forme $]0,a[^d$ contenu dans Ω, on a

$$C_\lambda K \lambda^{\frac{d}{2}} c_d \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d \leq N_{\Omega_K}(\lambda) \leq N_\Omega(\lambda),$$

avec $C_\lambda \to 1$ quand $\lambda \to \infty$. donc

$$\frac{N_\Omega(\lambda)}{\lambda^{\frac{d}{2}}} \geq C_\lambda c_d \left(\frac{a}{2\pi}\right)^d K a^d.$$

Or $Ka^d \longrightarrow |\Omega|$ quand on approche par Ω par des ouverts constitués de briques de plus en plus petites. En faisant ensuite tendre λ vers ∞, on obtient le résultat souhaité.

⋆

Solution 5. *Problème de Neumann*

1. La forme $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + u\bar{v}$ est continue sur H^1 et coercitive. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui nous donne l'existence d'un unique $u \in H^1$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + u\bar{v} = \int_\Omega f\bar{v}.$$

2. En appliquant la formule précédente à $v = u$, on a

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

L'application $(-\Delta + I)^{-1}$ est donc continue $L^2 \to H^1$. Comme l'injection de H^1 dans L^2 est compacte, l'application $(-\Delta + I)^{-1} : L^2 \to L^2$ est compacte. Soit $f, g \in L^2$. En appliquant la définition de solution faible avec $u = (-\Delta + I)^{-1} g$ et $v = (-\Delta + I)^{-1} f$ on obtient le résultat souhaité.

3. $(-\Delta + I)^{-1}$ est autoadjoint compact, donc il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de L^2 et une suite $\mu_n > 0$ décroissante tendant vers 0 telle que

$$(-\Delta + I)^{-1} e_n = \mu_n e_n.$$

On pose ensuite $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} - 1$.

⋆