Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 9

Transformée de Fourier

Séance du 9 avril 2018

Solution 1. *Échauffement*

1. Comme A est de mesure finie, $\mathbb{1}_A \in L^2$ donc $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^2$ par Plancherel. Par contre, si $\widehat{\mathbb{1}_A} \in L^1$, comme on a aussi $\mathbb{1}_A \in L^1$, la formule d'inversion de Fourier s'appliquerait, et on aurait

$$\mathbb{1}_A(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbb{1}_A}(\xi) e^{2i\pi x\cdot\xi} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

En particulier, d'après le théorème de convergence dominée, $\mathbb{1}_A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, ce qui est absurde.

2. En prenant la transformée de Fourier de l'égalité $f * g = 0$, on trouve $\hat{f}\hat{g} = 0$. Il suffit donc de prendre $f_0, g_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, avec $\operatorname{supp}(f_0)$ et $\operatorname{supp}(g_0)$ disjoints, et de poser $f = \mathcal{F}^{-1} f_0$, $g = \mathcal{F}^{-1} g_0$. Ce sont bien des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puisque $\mathcal{F}$ réalise un isomorphisme sur l'espace de Schwartz.

Si on suppose de plus que les supports de f et g sont compacts, alors $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont des fonctions analytiques (sur $\mathbb{C}^d$). En effet,

$$\hat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x\cdot z} dx$$

est bien défini quel que soit $z \in \mathbb{C}^d$, et différentiable (d'après les théorèmes usuels). Comme les zéros de $\hat{f}$ et de $\hat{g}$ sont alors isolés, ceux de $\hat{f}\hat{g}$ le sont également. Ainsi $\hat{f}\hat{g}$ n'est pas identiquement nul. Par l'inversion de Fourier, on voit que $f * g \neq 0$.

3. Supposons que $-\Delta u = 0$. Alors grâce à la transformée de Fourier, on trouve que $|\xi|^2 \hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'$. En effet, si $T \in \mathcal{S}'$, et $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \mathcal{F}(\Delta T), \varphi\rangle = \langle T, \Delta(\mathcal{F}\varphi)\rangle = \langle T, \mathcal{F}\left[-|x|^2\varphi\right]\rangle = -\langle |x|^2 \mathcal{F}T, \varphi\rangle.$$

En particulier, on a $\operatorname{supp} \hat{u} = \{0\}$, car si $\varphi \in \mathcal{S}$ est nulle au voisinage de 0,

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle |\xi|^2 \hat{u}, \underbrace{\frac{\varphi}{|\xi|^2}}_{\in\mathcal{S}}\rangle = 0.$$

On a vu (cf. TD n° 5) qu'alors $\hat{u}$ s'écrit comme une combinaison linéaire (finie) de δ_0 et de ses dérivées. Écrivons donc $\hat{u} = \sum_{|k|\leq K} \lambda_k \delta_0^{(k)}$. Or $\mathcal{F}^{-1}(\delta_0) = \mathbb{1}$, la fonction constante, car $\langle \mathcal{F}(\mathbb{1}), \varphi\rangle = \langle \mathbb{1}, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0)$, d'après la formule d'inversion pour les fonctions de $\mathcal{S}$. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta_0^{(k)}) = (-ix)^k \mathcal{F}^{-1}(\delta_0)$$

(avec la notation multi-indice), ce qui prouve que $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$ est un polynôme en $x \in \mathbb{R}^d$.

$\star$

Solution 2. *Translations*

1. Si $g \in V^\perp$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, $\int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = 0$, où $\tau_a f : t \mapsto f(t-a)$. Or

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)e^{-ix\xi}dx = e^{-ia\xi}\hat{f}(\xi),$$

car cela est vrai pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis pour toute fonction de L^2 en utilisant la continuité de τ_a et de la transformée de Fourier. À présent, par Plancherel,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{\tau_a f(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\overline{\widehat{\tau_a f}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)}e^{ia\xi}d\xi,$$

ce qui est vrai pour tout a. De la sorte, si l'on pose $F := \hat{g}\overline{\hat{f}}$, on a $F \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{F} \equiv 0$. Donc la formule d'inversion s'applique, et donc $F \equiv 0$. Pour prouver la réciproque, il suffit de remonter les calculs.

2. V est dense dans L^2 si et seulement si on ne peut trouver une fonction $\hat{g} \in L^2$ non nulle satisfaisant la condition de la question précédente. Si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure non nulle, on peut trouver $R > 0$ tel que la mesure de $[-R, R] \cap \{\hat{f} = 0\} =: Z_R$ soit strictement positive. Alors on peut poser $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{Z_R}) \in L^2(\mathbb{R})$, de sorte que $g \neq 0$ et $g \in V^\perp$. Réciproquement, si $\hat{f}$ est non nulle en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $g \in V^\perp$ implique nécessairement $\hat{g} \equiv 0$, soit $g \equiv 0$.

$\star$

Solution 3. *Transformée de Fourier de la valeur principale de $\frac{1}{x}$*

1. Par la formule de Taylor, $\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, et on vérifie que

$$\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi\rangle = \int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{|x|\leq 1} \psi(x)dx.$$

On voit bien que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée, bien définie pour les fonctions à décroissance rapide (car alors, les intégrales ci-dessus convergent, et sont bornées par des semi-normes qui définissent la topologie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$).

2. Montrons que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ est impaire au sens des distributions. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a donc, par définition de la transformée de Fourier des distributions,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})), \check{\varphi}\rangle &= \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \mathcal{F}(\check{\varphi})\rangle \\ &= \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), (\mathcal{F}(\varphi))\check{}\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \textstyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(\varphi)(-\xi)}{\xi}d\xi \\ &= -\langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \mathcal{F}(\varphi)\rangle.\end{aligned}$$

3. On a vu que $x\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbb{1}$ (cf. TD n° 5). En effet, si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), \phi\rangle = \langle \mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}), x\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi = \langle \mathbb{1}, \phi\rangle.$$

Comme $\mathcal{F}(\mathbb{1}) = 2\pi\delta_0$, on trouve que

$$2\pi\delta_0 = \mathcal{F}(x\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x})) = i\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))',$$

donc $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))' = -2i\pi\delta_0$. On en déduit que $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x})) = -2i\pi(H+C)$, où H est la fonction de Heaviside (soit $H = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$) et C est une constante. L'imparité de $\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\frac{1}{x}))$ impose à la fonction $H+C$ d'être impaire, c'est-à-dire donne $C = -1/2$, d'où

$$\mathcal{F}(\mathrm{vp}(\tfrac{1}{x}))(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi) = -i\pi\frac{\xi}{|\xi|}.$$

C'est bien une distribution à croissance modérée.

⋆

Solution 4. *Théorème de Bochner*

1. Il est facile de vérifier que $f(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$, que f est continue, et que $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$, puisque μ est réelle et positive. On calcule ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \overline{z_k} &= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot(\xi_j-\xi_k)} z_j \overline{z_k} \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j e^{ix\cdot\xi_j}\right) \overline{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k e^{ix\cdot\xi_k}\right)} \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{j=1}^{n} z_j e^{ix.\xi_j}\right|^2 \mu(dx) \geq 0.\end{aligned}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}^d$. On applique la propriété selon laquelle f est semi-définie positive, avec $\xi_1 = y$, $\xi_2 = 0$, $z_2 = 1$ et $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| = 1$. On a

$$2f(0) + f(y)z_1 + f(-y)\bar{z_1} \geq 0.$$

On choisit z_1 tel que $z_1 f(y) = -|f(y)|$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

3. Si $\psi \in \mathcal{S}$ est strictement positive, $\psi = \theta^2$ avec $\theta = \sqrt{\psi} \in \mathcal{S}$, donc

$$\ell(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\widehat{\theta^2}(\xi)d\xi = \iint_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\hat{\theta}(\eta)\hat{\theta}(\xi-\eta)d\eta d\xi = \iint_{\mathbb{R}^d} f(\eta-\xi')\hat{\theta}(\eta)\overline{\hat{\theta}(\xi')}d\eta d\xi' \geq 0,$$

où l'on a utilisé que $\hat{\theta}(\xi-\eta) = \overline{\hat{\theta}(\eta-\xi)}$, et fait le changement de variables $\xi' = \eta - \xi$. La positivité découle de ce qu'on peut écrire l'intégrale ci-dessus comme une limite de sommes de Riemann, toutes positives.

4. Soit $\phi \in \mathcal{S}$. Comme ϕ est à décroissance rapide, il existe $R > 0$ tel que pour $|x| \geq R$, on a $|\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+|x|^4)^d}$. On peut ensuite trouver $\lambda > 0$ assez petit tel que

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+\lambda R^4)^d}.$$

De la sorte, si $x \in \mathbb{R}^d$,

— ou bien $\forall 1 \leq j \leq d$, $|x_j| \leq R$, et alors

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{L^\infty} \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+\lambda R^4)^d} \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1+\lambda x_j^4} = (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

— ou bien l'une des composantes de x est plus grande que R, et alors $|x| \geq R$, d'où

$$|\phi(x)| \leq \frac{\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}}{(1+|x|^4)^d} \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1+\lambda x_j^4},$$

car pour chaque j, $1+|x|^4 \geq 1+\lambda|x|^4 \geq 1+\lambda x_j^4$.

5. Commençons par remarquer que pour tout $\lambda > 0$, K_λ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ dont les dérivées décroissent au moins aussi vite que K_λ, donc $\hat{K_\lambda}$ décroit plus vite que tout polynôme. En particulier, $\hat{K_\lambda} \in L^1$.

Ensuite, on veut appliquer la question 3 à $\psi_\varepsilon := (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty})K_\lambda - \phi$. C'est possible, car quitte à remplacer ε par 2ε, on peut supposer que $\psi_\varepsilon > 0$. Ensuite, notons $\chi(x) := (2\pi)^{-d}\exp(-|x|^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$, et, si $N \in \mathbb{N}$, $\chi_N(x) := \chi(\frac{x}{N})$, de sorte que $\chi_N\psi_\varepsilon$ est à décroissance rapide et satisfait les hypothèses de la question 3. On a donc $\ell(\chi_N\psi_\varepsilon) \geq 0$. Or grâce à un changement de variable,

$$\widehat{\chi_N}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{N^2}} e^{-ix\cdot\xi} dx = N^d\hat{\chi}(N\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, $\hat{\chi}$ est strictement positive (c'est une gaussienne), et grâce à la formule d'inversion,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\chi}(\xi)d\xi = (2\pi)^d\chi(0) = 1.$$

Cela prouve donc que $\widehat{\chi_N}$ est un noyau régularisant. Ainsi,

$$\ell(\chi_N\psi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\left[\widehat{\chi_N} * \widehat{\psi_\varepsilon}\right](\xi)d\xi \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi)d\xi = \ell(\psi_\varepsilon),$$

(la convergence se voit en coupant l'intégrale en deux, pour se restreindre à un grand compact qui contient presque la totalité de la masse de $\widehat{\psi_\varepsilon}$, où l'on applique ensuite le théorème de convergence dominée), et par conséquent, $\ell(\psi_\varepsilon) \geq 0$.

Ainsi l'on trouve que

$$\ell(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty})\ell(K_\lambda) = (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K_\lambda}(\xi)f(\xi)d\xi.$$

6. On note que $K_\lambda(x) = K_1(\lambda^{1/4}x)$. Donc pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{K_\lambda}(\xi) = \frac{1}{\lambda^{\frac{d}{4}}}\hat{K_1}\left(\frac{\xi}{\lambda^{\frac{1}{4}}}\right).$$

On a donc, quand λ tend vers 0,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{K_\lambda}(\xi)f(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K_1}(\xi)f(\lambda^{\frac{1}{4}}\xi)d\xi \longrightarrow f(0),$$

d'après le théorème de convergence dominée. On trouve donc

$$|\ell(\phi)| \leq \varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty},$$

et en faisant tendre ε vers 0, on obtient $|\ell(\phi)| \leq \|\phi\|_{L^\infty}$. D'après le théorème de Riesz, on peut donc prolonger ℓ en une mesure de probabilité μ positive. Au sens des distributions, on a $\hat{f} = \mu$ donc

$$f = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}\mu(dx),$$

en prenant par exemple $\phi(x) = e^{ix\cdot\xi}$, qui satisfait $\hat{\phi} = \delta_\xi$, dans l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\mu(dx).$$

⋆

Solution 5. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Si T est une distribution à support compact, on peut écrire, d'après le cours,

$$\mathcal{F}(T)(\xi) = \langle T, e^{-ix\xi}\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Comme pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto ixe^{-ix\xi}$ est toujours $\mathcal{C}^\infty$, on peut « dériver sous le crochet de dualité » (ce qui se justifie en régularisant T), et obtenir que $\mathcal{F}(T)$ est analytique (avec la même formule que ci-dessus, étendue à $\mathbb{C}$).

2. Pour $\xi \neq 0$, on a

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-i\xi)^N} e^{-ix\xi} \partial_x^N f(x) dx,$$

donc $|F(x)| \leq C_N |\xi|^{-N} e^{R|\operatorname{Im}(\xi)|}$, car $\partial_x^N f$ est bornée sur $B(0, R)$.

3. La borne sur F permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

4. On intègre $e^{ix\xi}F(\xi)$ sur un contour rectangulaire

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi + \int_0^\eta e^{ix(A+i\rho)} F(A+i\rho) d\rho + \int_A^{-A} e^{ix(\xi+i\eta)} F(\xi+i\eta) d\xi + \int_\eta^0 e^{ix(-A+i\rho)} F(-A+i\rho) d\rho = 0.$$

En passant à la limite quand A tend vers ∞, grâce aux bornes sur F, on obtient

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(\xi+i\eta)} F(\xi+i\eta) d\xi.$$

donc $|f(x)| \leq Ce^{R|\eta| - x\eta}$.

5. Si on choisit $\eta > 0$ qui tend vers $+\infty$, alors pour $R < x$, on obtient $f(x) = 0$. On fait de même pour $x < -R$ avec $\eta < 0$.

6. Soit T est une distribution à support compact, on note p son ordre (qui est fini), et $[-R, R]$ son support. Alors

$$|\mathcal{F}(T)(\xi)| = |\langle T, e^{-ix\xi}\rangle| \leq C \sum_{k=1}^{p} \|\partial_x^k e^{-ix\xi}\|_{L^\infty} \leq C(1+|\xi|)^p e^{R|\operatorname{Im}\xi|}.$$

Réciproquement, soit F une fonction analytique qui satisfait une telle condition. Alors $F \in \mathcal{S}'$ (car à croissance modérée sur $\mathbb{R}$). Soit $\rho_k(x) = k\rho(kx)$ une approximation de l'unité (où $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty$ est positive, paire et d'intégrale 1). Comme ρ_k est à support compact, $\widehat{\rho_k}$ satisfait les conditions de la question 2, donc $\widehat{\rho_k}F$ aussi, donc $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F)$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $B(0, R + \frac{1}{k})$. Soit g une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support dans le complémentaire de $\bar{B}(0, R)$. On a alors, pour k assez grand,

$$0 = \langle \rho_k * \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}(F), \rho_k * g\rangle \longrightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(F), g\rangle,$$

donc $\mathcal{F}^{-1}(F)$ est à support dans $B(0, R)$.

⋆