Corrigé d'analyse fonctionnelle
TD n° 9

Convolution des distributions

Séance du 1er avril 2019

Solution 1. *Échauffement*

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

2. • δ_a est à support compact, il n'y a donc pas de problème pour calculer $\delta_a * H$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

$$(\check{\delta_a} * \varphi)(x) = \langle \delta_a, \varphi(x+\cdot)\rangle = \varphi(x+a),$$

et donc

$$\langle H * \delta_a, \varphi\rangle = \langle H, \check{\delta_a} * \varphi\rangle = \langle H, \varphi(\cdot + a)\rangle = \langle \mathbb{1}_{x\geq a}, \varphi\rangle.$$

• On calcule : $\delta_0' * \mathbb{1} = (\delta_0 * \mathbb{1})' = \mathbb{1}' = 0$.

• Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Alors par la formule de Leibniz,

$$\langle x^m \delta_0^{(n)}, \varphi\rangle = \langle \delta_0^{(n)}, x^m\varphi(x)\rangle = (-1)^n \langle \delta_0, \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-k+1)!} x^{m-k}\varphi^{(n-k)}(x)\rangle.$$

On remarque que si $m > n$, $x^m\delta_0^{(n)} = 0$. Par ailleurs, si $m \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle x^m \delta_0^{(n)}, \varphi\rangle &= (-1)^n \binom{n}{m} m!\, \varphi^{(n-m)}(0) \\ &= (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \langle \delta_0^{(n-m)}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi $x^m\delta_0^{(n)} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!}\delta_0^{(n-m)}$. On va donc supposer que $m \leq n$ et $p \leq q$. On a alors

$$\begin{aligned}x^m\delta_0^{(n)} * x^p\delta_0^{(q)} &= (-1)^{m+p}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{q!}{(q-p)!}\delta_0^{(n-m)} * \delta_0^{(q-p)} \\ &= (-1)^{m+p}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{q!}{(q-p)!}\delta_0^{(n+q-m-p)},\end{aligned}$$

puisque pour tous $r, s \geq 0$, $\delta_0^{(r)} * \delta_0^{(s)} = (\delta_0 * \delta_0)^{(r+s)} = \delta_0^{(r+s)}$.

• $(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})''$ ne fait intervenir que des ditributions de $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il n'y a pas de problème pour définir leur convolution. Ensuite,

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \mathbb{1}_{[a,b]}' * \mathbb{1}_{[c,d]}' = (\delta_a - \delta_b) * (\delta_c - \delta_d).$$

Or $\delta_x * \delta_y = \delta_{x+y}$, car si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \delta_x * \delta_y, \varphi\rangle = \langle \delta_x, \check{\delta_y} * \varphi\rangle = \langle \delta_x, \varphi(\cdot + y)\rangle = \varphi(x+y),$$

donc

$$(\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]})'' = \delta_{a+c} + \delta_{b+d} - \delta_{a+d} - \delta_{b+c}.$$

• On voit que

$$\langle T * \delta_a, \varphi\rangle = \langle T, \check{\delta_a} * \varphi\rangle = \langle T, \varphi(a + \cdot)\rangle = \langle \tau_{-a} T, \varphi\rangle.$$

• $T * \mathbb{1}$ est bien définie en tant que distribution, car $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Ensuite,

$$\langle T * \mathbb{1}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\mathbb{1}} * \varphi\rangle = \langle T, \mathbb{1} * \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi \cdot \langle T, \mathbb{1}\rangle.$$

La dernière égalité est justifiée par la linéarité de T. Ainsi, $T * \mathbb{1} = \langle T, \mathbb{1}\rangle \mathbb{1}$ est une distribution constante.

• On vérifie que $T * \exp$ est bien définie, comme précédemment. Comme $\check{\exp} * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x - y))\varphi(y)dy$, on calcule

$$\langle T * \exp, \varphi\rangle = \langle T, \check{\exp} * \varphi\rangle = \left\langle T, x \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{y-x}\varphi(y)dy \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{y}\langle T, \exp(-x)\rangle dy.$$

Et donc $T * \exp = \langle T, \exp(-x)\rangle \exp$.

On peut aussi voir directement que $(T * \exp)' = T * \exp$, donc nécessairement $T * \exp = C \exp$, pour un $C \in \mathbb{R}$. Ensuite, on calcule

$$C = (T * \exp)(0) = \langle T, \check{\exp}\rangle = \langle T, \exp(-x)\rangle.$$

3. En dérivant l'égalité, on voit qu'on veut en fait

$$u * (\delta_0 - \delta_1) = u - \tau_1 u = \delta_0'.$$

Ceci donne l'idée de choisir :

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k'.$$

Calculons alors $\delta_a' * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_a * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_a - \delta_{a+1}$. Donc, si on note $T_n = \sum_{k=0}^{n} \delta_k'$, la somme se télescope, et on a

$$T_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_n \rightharpoonup \delta_0.$$

Or $\check{\mathbb{1}_{[0,1]}} * \varphi$ est une fonction test, à support compact (inclus dans $[-1, 0] + \mathrm{supp}(\varphi)$), donc comme $T_n \rightharpoonup u$ (dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$),

$$\langle u * \mathbb{1}_{[0,1]}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\mathbb{1}_{[0,1]}} * \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \check{\mathbb{1}_{[0,1]}} * \varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle T_n * \mathbb{1}_{[0,1]}, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

On en déduit que $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

⋆

Solution 2. *Dérivées successives des fonctions test*

1. Comme $H * \delta_a(x) = \mathbb{1}_{x\geq a}$, on peut écrire H_a sous la forme

$$H_a = \frac{1}{a}\mathbb{1}_{[0,a]}.$$

On a $(u * H_a)' = \frac{1}{a} u * (\delta_0 - \delta_a) = \frac{1}{a}(u(x) - u(x - a))$, qui est de classe $\mathcal{C}^k$ si $u \in \mathcal{C}^k$. On a donc prouvé que $u * H_a \in \mathcal{C}^{k+1}$.

2. On a $\int_{\mathbb{R}} u * H_a dx = \iint u(y)H_a(x - y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} u(y)dy$, car $\int_{\mathbb{R}} H_a(x - y)dx = \frac{1}{a}\int_y^{y+a} 1dx = 1$.

3. Il suffit de vérifier que $H_{a_0} * H_{a_1}$ est continue, et de raisonner par récurrence, en appliquant la question 1. Comme on convole en fait des fonctions localement bornées, on peut employer l'expression intégrale de la convolution et au moyen du changement de variable $w = x - y$,

$$H_{a_0} * H_{a_1}(x) = \frac{1}{a_0 a_1} \int_0^{a_0} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(x-y)dy = \frac{1}{a_0 a_1} \int_{x-a_0}^{x} \mathbb{1}_{[0,a_1]}(w)dw,$$

qui est bien une fonction continue en x.

Par ailleurs, le support de $H_{a_0} * \ldots * H_{a_n}$ est inclus dans l'adhérence de la somme des supports, c'est-à-dire dans $[0, a_0 + \cdots + a_n]$.

4. Soit $j < n$. On calcule

$$(H_{a_0} * \ldots * H_{a_n})^{(j)} = \frac{1}{a_0 \cdots a_{j-1}} (\delta_0 - \delta_{a_0}) * \cdots * (\delta_0 - \delta_{a_{j-1}}) * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}.$$

Comme $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$, on obtient 2^j termes de la forme

$$\delta_\kappa * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Chacun est majoré de la façon suivante :

$$\|\delta_\kappa * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|H_{a_j}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|H_{a_{j+1}} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Comme les H_a sont à valeurs positives et $\|H_{a_{j+1}} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1} = 1$ d'après la question 2., et que d'autre part $\|H_{a_j}\|_{L^\infty} \le \frac{1}{a_j}$, on peut conclure.

L'autre majoration fonctionne de même :

$$\|\delta_\kappa * H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1.$$

5. On montre d'abord que u_n est de Cauchy dans L^∞. On utilise l'associativité de la convolution, la positivité des H_a et le fait que $\|H_{a_j} * \ldots * H_{a_n}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$:

$$\begin{aligned}
|u_{k+n}(x) - u_n(x)| &= |u_n * (H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}})(x) - u_n(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y)(u_n(x-y) - u_n(x))dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y) \|u_n'\|_{L^\infty} |y| dy
\end{aligned}$$

Sur le support de $H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}$, on a $|y| \le a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$, donc on obtient grâce à la question précédente

$$\|u_{k+n} - u_n\|_{L^\infty} \le \frac{2}{a_0 a_1}(a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}).$$

Comme la somme des a_j est convergente, cela prouve que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbb{R})$. On procède de la même manière pour les dérivées :

$$\begin{aligned}
|u_{k+n}^{(j)}(x) - u_n^{(j)}(x)| &= |u_n^{(j)} * (H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}})(x) - u_n^{(j)}(x)| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y)(u_n^{(j)}(x-y) - u_n^{(j)}(x))dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} H_{a_{n+1}} * \ldots * H_{a_{n+k}}(y) \|u_n^{(j+1)}\|_{L^\infty} |y| dy \\
&\le \frac{2^{j+1}}{a_0 \ldots a_{j+1}}(a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $(u_n)_n$ converge uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, vers une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, dont le support est inclus dans $[0, a_\infty]$, où $a_\infty := \sum_j a_j$ (en particulier, u est à support compact).

6. Par la formule de Taylor, un fonction vérifiant de tels encadrements sur ses dérivées pour $\alpha \leq 1$ serait analytique (ou localement analytique si $\alpha = 1$), puisque

$$\left|\frac{f(x)}{n!}\right| \leq \frac{2^n}{(n!)^{1-\alpha}},$$

ce qui l'empêche d'être à support compact par le théorème des zéros isolés (et un raisonnement de connexité si $\alpha = 1$).

En revanche, si $\alpha > 1$, on peut appliquer la construction précédente avec $a_n = n^{-\alpha}$ (qui est sommable) : ainsi, pour tout $\alpha > 1$, il existe des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dont les dérivées n-ièmes sont uniformément majorées par $2^n (n!)^\alpha$.

⋆

Solution 3. *Équations différentielles linéaires*

1. Soient $S, T \in \mathcal{D}'_+$, et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$. Alors $\check{S}$ est à support dans $\mathbb{R}_-$, et $\check{S} * \varphi$ dans $\mathbb{R}_- + \mathrm{supp}(\varphi) =: X$. L'important est que $\mathbb{R}_+ \cap X$ est compact. Soit χ une fonction test qui vaut 1 au voisinage de $\mathbb{R}_+ \cap X$. Alors $T * S$ devrait être définie par

$$\langle T * S, \varphi \rangle := \langle T, \check{S} * \varphi \rangle = \langle T, \chi(\check{S} * \varphi) \rangle,$$

ce qui fait bien sens. De plus, son support est inclus dans $\mathbb{R}_+$, puisque si φ est supportée dans $\mathbb{R}_-$, alors $X \subseteq \mathbb{R}_-$, et donc on peut choisir $\chi \equiv 0$, ce qui implique $\langle T * S, \varphi \rangle = 0$.

Ainsi $\mathcal{D}'_+$ forme une algèbre d'élément neutre δ_0. L'associativité se démontre comme dans le cours.

2. Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned}
(\delta_0' - \lambda\delta_0) * (H(t)e^{\lambda t}) &= \delta_0' * (H(t)e^{\lambda t}) - \lambda\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}) \\
&= (\delta_0 * (H(t)e^{\lambda t}))' - \lambda H(t)e^{\lambda t} \\
&= (H(t)e^{\lambda t})' - \lambda H(t)e^{\lambda t} \\
&= \delta_0 e^{\lambda t} + \lambda H(t)e^{\lambda t} - \lambda H(t)e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Mais bien sûr, $\delta_0 e^{\lambda t} = \delta_0$.

3. Pour $n = 1$, c'est la question précédente. Ensuite, c'est une récurrence : si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
(\delta_0' - \lambda\delta_0) * \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) &= \left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right)' - \lambda\left(H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!}\right) \\
&= \delta_0\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} + H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!} + H(t)\lambda\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda H(t)\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} \\
&= H(t)\frac{t^{n-2}e^{\lambda t}}{(n-2)!},
\end{aligned}$$

qui vaut $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{*-(n-1)}$ par hypothèse de récurrence. Cela assure l'hérédité.

4. On considère l'équation différentielle ordinaire à coefficients constants $\sum_k a_k y^{(k)}(t) = f(t)$. Alors, comme $\delta_0' * u = (\delta_0 * u)' = u'$, on peut réécrire l'équation $\sum_k a_k u^{(k)}(t) = \delta_0$ sous la forme

$$\left(\sum_{k=0}^{K} a_k (\delta_0')^{*k}\right) * u = \delta_0$$

(on rappelle que $(\delta_0')^{*0} = \delta_0$ l'élément neutre pour la convolution). Introduisons le polynôme $P = \sum_{k=0}^{K} a_k X^k$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on le factorise en produit de facteurs de degré 1, soit $P = \beta \prod_j (X - \lambda j)^{n_j}$, et donc

$$\sum_k a_k (\delta_0')^{*k} = \beta \cdot \bigstar_j (\delta_0' - \lambda_j \delta_0)^{n_j}.$$

On conclut donc à l'existence d'une solution fondamentale

$$u = \left(\sum_k a_k (\delta_0')^{*k} \right)^{*-1} = \frac{1}{\beta} \cdot \bigstar_j \left(H(t) \frac{t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t}}{(n_j - 1)!} \right).$$

⋆

Solution 4. *Équation de Volterra*

1. D'après la question 1. de l'exercice précédent, la convolution $T_k * S$ est bien définie par $\langle T_k * S, \varphi \rangle = \langle T_k, \chi(\check{S} * \varphi) \rangle$ où χ est une fonction test égale à 1 sur $\mathbb{R}_+ \cap (\mathbb{R}_- \cap \operatorname{supp}(\varphi))$. D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors par convergence de T_k vers T dans $\mathcal{D}'_+$,

$$\langle S * T_k, \varphi \rangle = \langle T_k, \chi(\check{S} * \varphi) \rangle \to \langle T, \chi(\check{S} * \varphi) \rangle = \langle S * T, \varphi \rangle.$$

2. On peut montrer cette propriété par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Si à présent $n \geq 1$, et $x \in [0, a]$,

$$|K^{*(n+1)}(x)| \leq \int_0^x |K(x - y)| \cdot |K^{*n}(y)| dy \leq \int_0^x M_a \cdot M_a^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} dy \leq M_a^{n+1} \frac{x^n}{n!}.$$

3. D'après la question précédente, K^{*n} est localement bornée, donc localement intégrable, et s'identifie donc à une distribution. Fixons $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, et soit $a > 0$ tel que $\operatorname{supp} \phi \subseteq [-a, a]$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$|\langle K^{*n}, \varphi \rangle| \leq \int_0^a M_a^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{L^1} M_a^n \frac{a^n}{(n-1)!}, \tag{1}$$

en majorant x par a sous l'intégrale. Cela prouve que la série $\sum (-1)^n \langle K^{*n}, \phi \rangle$ est absolument convergente, et donc que $\sum (-1)^n K^{*n}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En notant L sa limite, on voit que

$$|\langle L, \varphi \rangle| \leq a M_a e^{a M_a} \|\varphi\|_{L^1},$$

et donc par dualité, L s'identifie à une fonction localement bornée.

Enfin, notons que, si $N \in \mathbb{N}$, on trouve par un argument de télescopage que

$$(\delta_0 + K) * \left(\delta_0 + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n K^{*n} \right) = \delta_0 + (-1)^N K^{*(N+1)}.$$

Or d'après l'inégalité (1) ci-dessus, $K^{*(N+1)} \to 0$ dans $\mathcal{D}'_+$ quand $N \to +\infty$. D'après la question 1., comme δ_0 et K sont dans $\mathcal{D}'_+$, on peut donc passer à la limite, et trouver le résultat cherché :

$$(\delta_0 + K) * (\delta_0 + L) = \delta_0.$$

4. Notons $K(x) = H(x) e^{\lambda x}$ pour $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction localement bornée à support dans $\mathbb{R}_+$. On a clairement, pour presque tout x,

$$(\delta_0 + K) * f(x) = f(x) + \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy.$$

Puisqu'on a affaire à des fonctions localement intégrables, l'égalité au sens presque partout est équivalente à l'égalité au sens des distributions. Soit à présent L comme ci-dessus. On peut poser

$$f := (\delta + L) * g,$$

qui est bien une solution de l'équation fonctionnelle. Comme $f(x) = g(x) + \int_0^x L(x-y)g(y)dy$, cette fonction f est bien localement intégrable.

$\star$

Solution 5. *Régularisation par polynômes*

1. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact. Supposons que $\operatorname{supp}\phi \subset B(0,R)$. On calcule, grâce au changement de variables $u = kx$,

$$\begin{aligned}\langle P_k, \phi\rangle = \int_{B(0,R)} P_k(x)\phi(x)dx = k^{-n}\int_{B(0,kR)} P_k\left(\frac{u}{k}\right)\phi\left(\frac{u}{k}\right)du \\ = \frac{1}{\pi^{n/2}}\int_{B(0,kR)}\left(1-\frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du.\end{aligned}$$

Ensuite, on rappelle que si $y \in [0,p]$, alors

$$\left|e^{-y} - \left(1-\frac{y}{p}\right)^p\right| \le \frac{1}{e(p-1)}. \tag{$\star$}$$

En effet, on considère $f : [0,p] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto e^{-y} - (1-\frac{y}{p})^p$, et

$$f'(y) = -e^{-y} + (1-\tfrac{y}{p})^{p-1} = e^{-y}\left(\exp((p-1)\ln(1-\tfrac{y}{p}) + y) - 1\right).$$

Donc f' a le signe de $g(y) := (p-1)\ln(1-\frac{y}{p}) + y$. Or $g'(y) = 1 - \frac{p-1}{p-y}$, g est donc croissante sur $[0,1]$, décroissante sur $[1,p[$. Comme $g(0) = 0$ et $g(y) \to -\infty$ quand $y \to p^-$, il existe un unique c_p ($c_p \ge 1$) tel que $g \ge 0$ sur $[0,c_p]$ et $g \le 0$ sur $[c_p,p[$. De plus, c_p vérifie

$$(p-1)\ln\left(1-\frac{c_p}{p}\right) = -c_p.$$

Finalement, f atteint son maximum en c_p (puisque $f(0) = 0$, $f(p) = e^{-p}$, on a aussi $f \ge 0$ sur $[0,p]$), et on trouve

$$f(c_p) = e^{-c_p} - e^{p\ln(1-\frac{c_p}{p})} = e^{-c_p} - e^{-\frac{p}{p-1}c_p} = e^{-c_p}\left(1 - e^{-\frac{c_p}{p-1}}\right) \le e^{-c_p}\frac{c_p}{p-1}.$$

(car $e^y \ge 1+y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$). Et finalement, comme $y \mapsto ye^{-y}$ atteint son maximum $1/e$ en 1, on obtient ($\star$).

Maintenant, avec $y = |u|^2$ et $p = k^{n+2}$, pour $k \ge R^2$ et $u \in B(0,kR)$, $|u|^2 \le |kR|^2 \le k^{n+2}$, et on en déduit :

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(0,kR)}\left(1-\frac{|u|^2}{k^{n+2}}\right)^{k^{n+2}}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du - \int_{B(0,kR)} e^{-|u|^2}\phi\left(\frac{u}{k}\right)du\right| \\ \le \frac{1}{e(k^{n+2}-1)}\int_{B(0,kR)}\left|\phi\left(\frac{u}{k}\right)\right|du = \frac{k^n}{e(k^{n+2}-1)}\|\phi\|_{L^1} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Enfin, on voit que $\phi(u/k) \to \phi(0)$ lorsque $k \to \infty$ à $u \in \mathbb{R}^n$ fixé, et la domination

$$|e^{-|u|^2}\phi(u/k)\mathbb{1}_{B(0,kR)}(u)| \leq e^{-|u|^2}\|\phi\|_{L^\infty}\mathbb{1}_{B(0,R)}(u)$$

permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\int_{B(0,kR)} e^{-|u|^2}\phi\left(\frac{u}{k}\right) du \longrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|u|^2} du\right)\phi(0) = \pi^{n/2}\phi(0).$$

Finalement, on a bien :

$$\langle P_k, \phi\rangle \to \phi(0),$$

i.e. $P_k \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Soit T une distribution à support compact. On identifie alors P_k à un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, de sorte que la convolution $T * P_k$ est bien définie. De plus, on a directement

$$\partial^\alpha(T * P_k) = T * (\partial^\alpha P_k) = 0,$$

donc en prenant par exemple $\alpha = (2k^{n+2}+1, \ldots, 2k^{n+2}+1)$, $T * P_k$ est un polynôme.

Ensuite, vu que pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, $\check{T} * \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle T * P_k, \phi\rangle = \langle P_k, \check{T} * \phi\rangle \longrightarrow (\check{T} * \phi)(0) = \langle T, \phi\rangle.$$

Et ainsi on a prouvé que $T * P_k \rightharpoonup T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

⋆