Analyse fonctionnelle et EDP,
Corrigé de l'examen de juin 2009
ENS, FIMFA, première année

Exercice 1
Première partie: quelques formules d'intégration par parties

1. En intégrant par parties, en utilisant l'antisymétrie de l'opérateur curl et le théorème de symétrie de Schwarz, on a:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v)\ \varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) &= \int_\Omega (\partial_j \Delta v^i - \partial_i \Delta v^j)\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) \\
&= \int_\Omega \Delta v^i(-\partial_j\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) - \varphi\partial_j \mathrm{curl}_{ij}(u)) \\
&\quad + \int_\Omega \Delta v^j(\partial_i\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) - \varphi\partial_i \mathrm{curl}_{ij}(u)) \\
&= \int_\Omega \Delta v^i(-\partial_j\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) - \varphi\partial_{jj}u^i + \varphi\partial_{ji}u^j) \\
&\quad + \int_\Omega \Delta v^j(\partial_i\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) + \varphi\partial_{ij}u^i - \varphi\partial_{ii}u^i) \\
= -2\int_\Omega \Delta v^i\ \mathrm{curl}_{ij}(u)\ \partial_j\varphi &- \int_\Omega \Delta v^i\varphi\Delta u^i + \int_\Omega \Delta v^i\varphi\partial_i(\mathrm{div}(u)) \\
&- \int_\Omega \Delta v^j\varphi\Delta u^j + \int_\Omega \Delta v^j\varphi\partial_j(\mathrm{div}(u))
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v)\ \varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) &= -2\int_\Omega \Delta v^i\ \mathrm{curl}_{ij}(u)\ \partial_j\varphi \\
&\quad -2\int_\Omega \varphi\Delta u\cdot\Delta v + 2\int_\Omega \Delta v\cdot(\varphi\nabla(\mathrm{div}(u))
\end{aligned}
$$

2. Soit $\theta \in C_c^\infty$, on a en intégrant par parties à la seconde ligne:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\theta\cdot(\Delta u - \nabla(\mathrm{div} u))) &= \int_\Omega \partial_i\theta(\partial_{jj}u^i - \partial_{ij}u^j) \\
&= \int_\Omega \theta(-\partial_{ijj}u^i + \partial_{iij}u^j) = 0.
\end{aligned}
$$

3. On a

$$
\int_\Omega \Delta v\cdot(\varphi\nabla(\mathrm{div}(u))) = \int_\Omega \Delta v\cdot\nabla(\varphi(\mathrm{div}(u))) - \int_\Omega \Delta v\cdot\nabla\varphi\ (\mathrm{div}(u))
$$

Avec la question 2, on a par ailleurs:

$$\int_\Omega \Delta v \cdot \nabla(\varphi(\mathrm{div}(u))) = \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(v) \cdot \nabla(\varphi(\mathrm{div}(u)))$$

et donc:

$$\int_\Omega \Delta v \cdot (\varphi \nabla(\mathrm{div}(u))) = \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(v) \cdot \nabla(\varphi(\mathrm{div}(u))) - \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi \, (\mathrm{div}(u)) \tag{1}$$

Par ailleurs, il découle de la question 2 que

$$\int_\Omega (\Delta u - \nabla(\mathrm{div}(u))) \nabla(\varphi \mathrm{div}(v)) = 0. \tag{2}$$

Sommant (1) et (2) il vient ainsi:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta v \cdot (\varphi \nabla(\mathrm{div}(u))) &= \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(v) \cdot (\varphi \nabla \mathrm{div}(u) + \nabla \varphi \, \mathrm{div}(u)) \\
&\quad - \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi \, (\mathrm{div}(u)) + \int_\Omega \Delta u \nabla(\varphi \mathrm{div}(v)) \\
&\quad - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot (\varphi \nabla \mathrm{div}(v) + \nabla \varphi \, \mathrm{div}(v)) \\
&= - \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi \, (\mathrm{div}(u)) + \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(v) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(u) \\
&\quad + \int_\Omega \Delta u \nabla(\varphi \mathrm{div}(v)) - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(v) \\
&= - \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi \, (\mathrm{div}(u)) + \int_\Omega \nabla \mathrm{div}(v) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(u) \\
&\quad - \int_\Omega \mathrm{div}(\Delta u) \varphi \mathrm{div}(v) - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(v)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité a été obtenue en intégrant par parties le troisième terme.

4. On déduit immédiatement des questions 1 et 3 que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi \Delta u \cdot \Delta v = -\frac{1}{2} \int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v) \, \varphi \, \mathrm{curl}_{ij}(u) - \int_\Omega \Delta v^i \, \mathrm{curl}_{ij}(u) \, \partial_j \varphi \\
- \int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(u) + \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v)) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(u) \\
- \int_\Omega \mathrm{div}(\Delta u) \mathrm{div}(v) \varphi - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{div}(v).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que u et v sont seulement $H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et soit $\omega \subset\subset \Omega$ tel que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \omega$. Par les techniques de régularisation habituelles vues en cours (ou en appliquant simplement le théorème de Frioedrichs), il existe des suites u_n et v_n dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^d$ telles que $u_n|_\omega$ et $v_n|_\omega$ convergent dans $H^2(\omega)^d$ vers $u|_\omega$ et $v|_\omega$ (autrement dit on a convergence forte dans $L^2(\omega)$ jusqu'aux dérivées secondes). On a en particulier

$$\int_\Omega \varphi \Delta u \cdot \Delta v = \lim_n \varphi \Delta u_n \cdot \Delta v_n.$$

Or, on a vu que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \Delta u_n \cdot \Delta v_n = -\frac{1}{2}\int_\Omega \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v_n)\,\varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u_n) - \int_\Omega \Delta v_n^i\,\mathrm{curl}_{ij}(u_n)\,\partial_j\varphi \\ - \int_\Omega \Delta v_n \cdot \nabla\varphi\,\mathrm{div}(u_n) + \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v_n))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(u_n) \\ - \int_\Omega \mathrm{div}(\Delta u_n)\mathrm{div}(v_n)\varphi - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u_n))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(v_n).\end{aligned}$$

On notera $I_1^n, ..., I_6^n$ chacune des intégrales précédentes. A part pour I_1^n et I_5^n, le passage à la limite est évident (à chaque fois on a l'intégrale d'un produit de fonctions convergeant fortement dans L^2). Les termes I_1^n et I_5^n contiennent des dérivées troisièmes, pour passer à la limite on remarque simplement que si f_n converge vers f dans L^2 alors $\partial_i f_n$ converge (fort) vers $\partial_i f$ dans H^{-1}. Pour le terme I_1^n, en utilisant la convergence dans $H^{-1}(\omega)$ de $\mathrm{curl}_{ij}(\Delta v_n)$ vers $\mathrm{curl}_{ij}(\Delta v)$ et la convergence dans $H_0^1(\omega)$ de $\varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u_n)$ vers $\varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u)$ on obtient donc:

$$\lim_n I_1^n = \frac{-1}{2} < \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v), \varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u) >_{H^{-1}(\omega),H_0^1(\omega)}\,.$$

De la même manière

$$\lim_n I_5^n = - < \mathrm{div}(\Delta u), \varphi\,\mathrm{div}(v) >_{H^{-1}(\omega),H_0^1(\omega)}\,.$$

On a ainsi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\Delta u\cdot\Delta v = -\frac{1}{2} < \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v), \varphi\,\mathrm{curl}_{ij}(u) >_{H^{-1}(\omega),H_0^1(\omega)} \\ - \int_\Omega \Delta v^i\,\mathrm{curl}_{ij}(u)\,\partial_j\varphi - \int_\Omega \Delta v\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(u) + \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(u) \\ - < \mathrm{div}(\Delta u), \mathrm{div}(v)\varphi >_{H^{-1}(\omega),H_0^1(\omega)} - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u))\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{div}(v).\end{aligned}$$

Deuxième partie: le lemme "div-curl"

1. Soit donc u_n^i et v_n^i dans $H_0^1(\Omega)$ solutions faibles de $-\Delta u_n^i = a_n^i$ et $-\Delta v_n^i = b_n^i$, on a par régularité elliptique que u_n^i et v_n^i sont bornées dans $H^2(\Omega)$ et donc en vertu du théorème de compacité de Rellich-Kondrachov précompactes dans H^1. On en déduit facilement que (u_n) et (v_n) convergent fortement dans H^1 et faiblement dans H^2 (i.e. convergence faible dans L^2 des dérivées secondes) vers u et v définies par

$$-\Delta u^i = a^i,\ -\Delta v^i = b^i,\ u^i \in H_0^1(\Omega),\ v^i \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que l'hypothèse de compacité de l'énoncé implique que $\mathrm{curl}_{ij}(b_n)$ et $\mathrm{div}(a_n)$ convergent fortement dans H^{-1} respectivement vers $\mathrm{curl}_{ij}(b)$ et $\mathrm{div}(a)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ il s'agit de montrer que

$$\int_\Omega \varphi a \cdot b = \int_\Omega \varphi \Delta u \cdot \Delta v = \lim_n \int_\Omega \varphi \Delta u_n \cdot \Delta v_n$$

pour établir cette convergence, il suffit de pouvoir passer à la limite dans les 6 termes (à nouveau notées $I_1^n, ... I_6^n$) de la formule obtenue à la question 4 de la première partie. Pour chacun de ces termes, on remarque qu'on le produit d' un terme qui converge fortement et d'un terme qui converge faiblement. Plus précisément:

- Cas de I_1^n : $\mathrm{curl}_{ij}(\Delta v_n) = \mathrm{curl}_{ij}(b^n)$ converge fortement dans H^{-1} vers $\mathrm{curl}_{ij}(\Delta v) = \mathrm{curl}_{ij}(b)$ et $\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u_n)$ converge faiblement dans H_0^1 vers $\varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u)$ ainsi

$$\lim_n I_1^n = -\frac{1}{2} < \mathrm{curl}_{ij}(\Delta v), \varphi\ \mathrm{curl}_{ij}(u) >_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)}$$

- Cas de I_2^n : $\Delta v_n^i \rightharpoonup \Delta v^i$ dans L^2 et $\mathrm{curl}_{ij}(u_n)\ \partial_j \varphi \to \mathrm{curl}_{ij}(u)\ \partial_j \varphi$ dans L^2 et donc

$$\lim_n I_2^n = -\int_\Omega \Delta v^i\ \mathrm{curl}_{ij}(u)\ \partial_j \varphi$$

- Cas de I_3^n : similaire à celui de I_2^n et

$$\lim_n I_3^n = -\int_\Omega \Delta v \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{div}(u)$$

- Cas de I_4^n : $\nabla(\mathrm{div}(v_n)) \rightharpoonup \nabla(\mathrm{div}(v))$ dans L^2 et $\nabla \varphi\ \mathrm{div}(u_n) \to \nabla \varphi\ \mathrm{div}(u_n)$ dans L^2 si bien que

$$\lim_n I_4^n = \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(v)) \cdot \nabla \varphi\ \mathrm{div}(u)$$

- Cas de I_5^n : $\mathrm{div}(\Delta u_n) = \mathrm{div}(a_n)$ converge fortement dans H^{-1} vers $\mathrm{div}(\Delta u) = \mathrm{div}(a)$ et $\mathrm{div}(v_n)\varphi$ converge faiblement dans H_0^1 vers $\mathrm{div}(v)\varphi$ et donc

$$\lim_n I_5^n = - < \mathrm{div}(\Delta u), \mathrm{div}(v)\varphi >_{H^{-1}(\omega), H_0^1(\omega)}$$

- Cas de I_6^n : identique à celui de I_4^n et

$$\lim_n I_6^n = - \int_\Omega \nabla(\mathrm{div}(u)) \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{div}(v).$$

En utilisant à nouveau la formule de la question 4, on en déduit

$$\lim_n \int_\Omega \varphi a_n \cdot b_n = \int_\Omega \varphi a \cdot b$$

et donc $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2. En dimension 2 : $a_n(x, y) = b_n(x, y) = (\cos(nx), \sin(nx))$ on a alors $a_n \rightharpoonup 0$ at $a_n \cdot b_n = 1$.

Exercice 2

Pour tout u et v dans $L^2(\Omega)$ soit $T_1(v) = \eta \in H_0^1(\Omega)$ et $T_2(u) = \eta \in H_0^1(\Omega)$ respectivement solution faible de $-\Delta\eta+\eta = f(v)$ et $-\Delta\theta+\theta = g(u)$, on pose enfin $T(u, v) := (T_1(v), T_2(u))$, T est alors une application bien définie de $L^2(\Omega)^2$ dans lui-même et il est clair que $(u, v) \in H_0^1(\Omega)^2$ est solution faible du système si et seulement si (u, v) est un point fixe de T. Munissons $H := L^2(\Omega)^2$ de la norme $(u, v) \mapsto \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}$ et montrons que T est une contraction, ce qui permettra de conclure grâce au Théorème du point fixe de Banach. Soit donc (u_1, v_1) et (u_2, v_2) dans H, $\eta_i := T_1(v_i)$, $\theta_i := T_2(u_i)$, $\eta := \eta_1 - \eta_2$, $\theta := \theta_1 - \theta_2$, on a donc

$$-\Delta\eta + \eta = f(v_1) - f(v_2), \; \eta \in H_0^1(\Omega)$$

en multipliant par η et en intégrant, il vient donc en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz et le fait que f soit 1-Lipschitzienne:

$$\int_\Omega (|\nabla\eta|^2 + \eta^2) = \int_\Omega (f(v_1) - f(v_2))\eta \le \|v_1 - v_2\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2}$$

Par ailleurs, on déduit de l'inégalité de Poincaré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_\Omega (|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2) = \|\varphi\|_{H^1}^2 \ge (1 + \alpha)\|\varphi\|_{L^2}^2$$

pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, de sorte que

$$\|\eta\|_{L^2} = \|T_1(v_1) - T_1(v_2)\|_{L^2} \le \frac{1}{1+\alpha} \|v_1 - v_2\|_{L^2}.$$

De même, on a

$$\|\theta\|_{L^2} = \|T_2(u_1) - T_2(u_2)\|_{L^2} \leq \frac{1}{1+\alpha}\|u_1 - u_2\|_{L^2}.$$

On a donc $\|T(u_1, v_1) - T(u_2, v_2)\| \leq (1+\alpha)^{-1}\|(u_1 - u_2, v_1 - v_2)\|$ pour tout (u_1, v_1) et (u_2, v_2) dans H; ainsi T est bien une contraction de H. L'existence et l'unicité d'une solution du système découle alors simplement du Théorème du point fixe pour les contractions de Banach.

Exercice 3

Soit $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a d'abord

$$\int f u_n = \int_{\{|u_n|<\lambda\}} f u_n + \int_{\{|u_n|\geq\lambda\}} f u_n$$

et donc

$$\Big|\int f u_n\Big| \leq \lambda \int |f| + \|u_n\|_{L^p}\|f\chi_{\{|u_n|\geq\lambda\}}\|_{L^{p'}}.$$

Montrons que le second terme dans le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. D'une part, (u_n) est bornée (car faiblement convergente) dans L^p. D'autre part, rappelons que puisque $|f|^{p'} \in L^1(\Omega)$ pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\int_A |f|^{p'} \leq \varepsilon$ pour tout A tel que $|A| \leq \delta$ ainsi $\|f\chi_{\{|u_n|\geq\lambda\}}\|_{L^{p'}} \to 0$ car

$$\lim_{n\to\infty} |\{|u_n| \geq \lambda\}| = 0.$$

On a ainsi

$$\Big|\int f u\Big| = \lim_n \Big|\int f u_n\Big| \leq \lambda \int |f|, \; \forall f \in L^{p'}$$

ce qui montre que $u \in L^\infty$ et $\|u\|_{L^\infty} \leq \lambda$.