FIMFA ENS Ulm — Mardi 12 juin 2006 — Durée : 3 heures

Corrigé de l'examen final de géométrie différentielle

I (1) Ceci découle du fait que $X_k(M)$ est ouvert dans M^k (comme complémentaire d'un fermé) et que l'application considérée est la restriction à cet ouvert de la i-ème projection de M^k dans M, qui est une submersion C^∞, par les propriétés des variétés produits.

(2) L'application $f : X_k(M) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i,j=1}^k ||x_i - x_j||^2$ est de classe C^∞, et 1 est dans son image (car f est positive, n'est pas l'application nulle car $k \geq 2$, et est homogène : $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) = \lambda^2 f(x_1, \dots, x_k)$). La i-ème différentielle partielle de f est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : h = (h_1, \dots, h_k) \mapsto 4\langle h_i, \sum_{j \neq i} x_i - x_j \rangle \ .$$

Si pour tout $1 \leq i \leq k$ on a $\sum_{j \neq i} x_i - x_j = 0$, alors par différence, $x_1 = x_2$, ce qui est impossible dans $X_k(\mathbb{R}^n)$. Soit donc i tel que $1 \leq i \leq k$ et $h_i = \sum_{j \neq i} x_i - x_j \neq 0$. Posons $h_j = 0$ pour $j \neq i$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(h_0 \dots, h_k) = 2||h_i||^2$ est non nul, et donc la différentielle de f est surjective en tout point de l'ouvert $X_k(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème des submersions, $f^{-1}(1)$ est donc une sous-variété C^∞ de $X_k(\mathbb{R}^n)$.

(3) Le groupe $\mathfrak{S}_k$ est fini, et l'action à gauche de $\mathfrak{S}_k$ sur $X_k(M)$ définie par $(\sigma, (x_1, \dots, x_k)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(k)})$ est une action par C^∞-difféomorphismes, qui est libre car si $(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(k)}) = (x_1, \dots, x_k)$, alors $x_{\sigma^{-1}(i)} = x_i$ pour tout i, donc $\sigma^{-1}(i) = i$ pour tout i, car on est dans $X_k(M)$, donc $\sigma = \mathrm{id}$. Le résultat découle alors de la construction des structures de variété quotient par une action libre et propre par C^∞-difféomorphismes d'un groupe discret.

(4) Soient $(a, b) \in X_2(\mathbb{S}_n)$, $\theta \in\,]0, \pi]$ l'angle de a à b, et $\mathcal{O} = G \cdot (a, b)$. Si $b = -a$, alors $\mathcal{O}$ est l'image par le C^∞-plongement $x \mapsto (x, -x)$ de $\mathbb{S}_n$ dans $X_2(\mathbb{S}_n)$ (car C^∞, injectif, immersif en regardant la première coordonnée, et de source compacte), donc est une sous-variété. Supposons donc $\theta < \pi$. Comme G préserve les angles, et agit transitivement sur les couples de vecteurs unitaires faisant un angle donné, on a $\mathcal{O} = \{(x, y) \in X_2(\mathbb{S}_n) \ : \ \langle x, y \rangle = \cos\theta\}$. L'application $f : X_2(\mathbb{S}_n) \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est C^∞ (car restriction d'une application bilinéaire à une sous-variété C^∞), et $\cos\theta$ est dans son image. Son application tangente, qui est $Tf_{(x,y)} : (h, \ell) \mapsto \langle h, y \rangle + \langle x, \ell \rangle$, où (h, ℓ) parcourt $x^\perp \times y^\perp$, est surjective pour (x, y) dans $\mathcal{O}$. En effet, on a alors $y \neq -x$ car $\theta < \pi$, donc $x^\perp \neq y^\perp$ (car $x \neq y$), et si par exemple $h \in x^\perp - y^\perp$, alors $Tf_{(x,y)}(h, 0) \neq 0$. Donc par le théorème des submersions, $\mathcal{O} = f^{-1}(\cos\theta)$ est une sous-variété C^∞.

Le groupe de Lie G agit donc transitivement, de manière C^∞ par restriction, sur la variété $\mathcal{O}$ de classe C^∞, donc par le théorème sur les espaces homogènes, si

$H = G_{(a,b)}$ est le stabilisateur de (a,b) dans G, alors H est un sous-groupe de Lie de G et la bijection canonique $G/H \to \mathcal{O}$ est un C^∞-difféomorphisme.

(5) L'application σ est C^∞, injective, immersive, car s l'est, donc c'est un C^∞-plongement, car $\mathbb{S}_1$ est compacte.

Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;:\; y = x\}$ et $\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \;:\; y = -x\}$. Alors Δ et Δ' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si $u+v$ est l'écriture d'un vecteur de E dans la décomposition en somme directe $E = \Delta + \Delta'$, alors l'application $(t, u+v) \mapsto (1-t)u + v$ de $[0,1] \times X_2(\mathbb{R}^n) = E - \Delta$ dans $\Delta' - \{0\}$ est une rétraction par déformation forte. Comme $\mathbb{R}^n - \{0\}$ se rétracte par déformation forte sur la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$, la variété $X_2(\mathbb{R}^n)$ a donc le même type d'homotopie que $\mathbb{S}_{n-1}$. Comme $n \geq 2$, on a alors, par invariance par homotopie de la cohomologie de de Rham et le calcul de la cohomologie des sphères, $H^p(X_2(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{R}$ si $p = 0, n-1$ et $H^p(X_2(\mathbb{R}^n)) = 0$ sinon.

Pour ϵ assez petit, soit V le ϵ-voisinage ouvert de $\sigma(\mathbb{S}_1)$, qui se rétracte par déformation forte sur $\sigma(\mathbb{S}_1)$, donc a le même type d'homotopie que le cercle.

Soit $U = X_2(\mathbb{R}^n) - \sigma(\mathbb{S}_1)$, qui est un ouvert, car $\sigma(\mathbb{S}_1)$ est compacte. Comme $n \geq 2$, l'ouvert U est connexe, donc $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Alors $U \cup V = X_2(\mathbb{R}^n)$, qui a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}_{n-1}$ par ce qui précède.

De plus, $U \cap V = V - \sigma(\mathbb{S}_1)$ a le même type d'homotopie (par rétraction radiale perpendiculaire à $\sigma(\mathbb{S}_1)$) que la variété produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}$. Un argument élémentaire de suite exacte de Mayer-Vietoris, appliqué aux deux ouverts $(\mathbb{S}_1 - \{(1,0)\}) \times \mathbb{S}_{2n-2}$ et $(\mathbb{S}_1 - \{(-1,0)\}) \times \mathbb{S}_{2n-2}$ dans la variété connexe orientable $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}$ montre que $H^p(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2})$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ si $p = 0, 1, 2n-2, 2n-1$, et vaut 0 sinon, car $n \geq 2$.

Soit p un entier positif non nul. La suite exacte de Mayer-Vietoris fournit donc une suite exacte

$$H^{p-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^p(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}) \to H^p(U) \times H^p(\mathbb{S}_1) \to H^p(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^{p+1}(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2})\ .$$

Si $p \neq 1, n-1, 2n-2, 2n-1$ alors les termes de part et d'autre de $H^p(U) \times H^p(\mathbb{S}_1)$ s'annulent, donc $H^p(U) = 0$ par exactitude.

Si $p = 2n-1$, comme $n \geq 2$, on a une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{0\} \to 0$, et $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$.

Si $n = 2$, remarquons tout d'abord que l'inclusion de $\sigma(\mathbb{S}_1)$ dans $X_2(\mathbb{R}^2)$ est une équivalence d'homotopie, et on a une suite exacte

$$H^0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^0(U) \times H^0(\mathbb{S}_1) \to H^0(\mathbb{S}_1) \to H^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^1(U) \times H^1(\mathbb{S}_1)$$

$$\to H^1(\mathbb{S}_1) \to H^2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^2(U) \times H^2(\mathbb{S}_1) \to H^2(\mathbb{S}_1) = 0\ .$$

La seconde flèche et la cinquième sont surjectives (par la remarque préliminaire). D'où deux suites exactes $0 \to \mathbb{R} \to H^1(U) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 0$ et $0 \to \mathbb{R} \to H^2(U) \times \{0\} \to 0$, donc (par comptage de dimension) $H^1(U) \simeq \mathbb{R}$ et $H^2(U) \simeq \mathbb{R}$.

Nous pouvons donc supposer $n > 2$. Si $p = 2n-2$, comme $n > 2$, on a encore une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{0\} \to 0$, et $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$. Si $p = n-1$, alors

$1 < p < p+1 < 2n-2$, donc on a une suite exacte $0 \to H^p(U) \times \{0\} \to \mathbb{R} \to 0$, d'où $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$. Enfin, si $p = 1$, alors on a une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{\mathbb{R}\} \to 0$, et donc $H^p(U) = 0$.

Pour résumer, $H^p(M) \simeq \mathbb{R}$ si $p = 0, n-1, 2n-2, 2n-1$, et $H^p(M) = 0$ sinon.

$\boxed{\text{II}}$ (1) La 2-forme différentielle Ω_n est constante sur M, donc est C^∞. Pour tout $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ non nul dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si $X' = (-y_1, \dots, -y_n, x_1, \dots, x_n)$, alors par définition du produit extérieur, $\Omega_n(X, X') = \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \neq 0$, donc Ω_n est non dégénérée. Enfin, si $\lambda = \sum_{i=1}^n x_i \, dy_i$, alors $d\lambda = \Omega_n$, et donc Ω_n est exacte (si on ne veut pas expliciter λ, on peut aussi dire que Ω_n est fermée (car constante), que M est contractile, donc que $H^2(M) = \{0\}$ et par conséquent que Ω_n est exacte ; mais c'est plus long). [On ne confondra pas exacte et fermée !]

(2) Pour tout x dans M, puisque $-df_x$ est une forme linéaire sur T_xM, et puisque ω_x est non dégénérée, il existe un unique vecteur $X_f(x) \in T_xM$ tel que pour tout X' dans T_xM, on ait $\omega_x(X_f(x), X') = -df_x(X')$. Le champ de vecteurs $x \mapsto X_f(x)$ sur M est C^∞ car le probème est local, et par naturalité, il suffit de le montrer pour $M = U$ un ouvert de $E = \mathbb{R}^N$, où $\Omega^2(U) = \mathrm{C}^\infty(U, \Lambda^2 E^*)$. L'application de $U \times E$ dans $U \times E^*$ définie par $(x, u) \mapsto (x, v \mapsto \omega_x(u, v))$ est C^∞ (car ω_x l'est, et en prenant des coordonnées), bijective car ω est non dégénérée, et par calcul de différentielle par bloc, est un C^∞-difféomorphisme local par le théorème d'inversion locale. Donc c'est un difféomorphisme, et si $(x, \ell) \mapsto (x, \theta(x, \ell))$ est son inverse, alors $X_f(x) = \theta(x, -df_x)$), qui dépend de manière C^∞ de x.

(3) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in M$, posons

$$X_f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Alors X_f est bien un champ de vecteurs C^∞ sur M, par écriture C^∞ dans la base canonique. Pour tout $X' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n)$ dans T_xM, on a

$$(\Omega_n)_x(X_f(x), X') = \sum_{i=1}^n (-y_i) y'_i - (x_i) x'_i = -\sum_{i=1}^n x_i x'_i + y_i y'_i = -df_x(X') \ ,$$

et le résultat en découle par unicité.

(4) Soit (ϕ_t) le flot local de X_f. Pour tout x dans M, on a, par dérivation des fonctions composées, par définition du flot, et par définition de X_f,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(x)) &= df_{\phi_t(x)}\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = df_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x))\big) \\ &= -\omega_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x)), X_f(\phi_t(x))\big) = 0 \ , \end{aligned}$$

car ω est alternée, et le résultat en découle.

(5) Pour tout C^∞-difféomorphisme local φ entre deux variétés C^∞, rappelons que φ^* désigne aussi bien l'image réciproque des champs de vecteurs que celle des formes

différentielles. Pour tout g dans G, on a $(L_g)^*f = f \circ L_g = f + f(g)$ puisque f est un morphisme de groupes. Donc $-d((L_g)^*f) = -df_e$. En appliquant successivement l'invariance de ω, l'exercice E136, la définition de X_f, la commutation des images réciproques et des différentielles extérieure, la formule juste obtenue et la définition de X_f, on a alors

$$\begin{aligned} i_{(L_g)^*X_f}\omega &= i_{(L_g)^*X_f}((L_g)^*\omega) = (L_g)^*(i_{X_f}\omega) = (L_g)^*(-df) = -d((L_g)^*f) = -df \\ &= i_{X_f}\omega \ . \end{aligned}$$

Par unicité, on a donc $(L_g)^*X_f = X_f$, c'est-à-dire que X_f est invariant par translations à gauche.

(6) La première équation découle du fait que ω_x est alternée pour tout x dans M. Pour tout x dans M, on a $\omega_x(X_f(x), X_g(x)) = -\omega_x(X_g(x), X_f(x)) = dg_x(X_f(x))$ et $\omega_x(X_f(x), X_g(x)) = -df_x(X_g(x)) = -\mathcal{L}_{X_g}(f)(x)$ par définition de la dérivée de Lie, ce qui montre la seconde équation. Enfin, par la seconde équation,

$$\{f, gh\} = d(gh)(X_f) = dg(X_f)h + dh(X_f)g = \{f,g\}h + \{f,h\}g \ ,$$

ce qui montre la troisième relation.

(7) Soit (ϕ_t) le flot local de X_f. Pour tout x dans M, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g \circ \phi_t(x)) &= dg_{\phi_t(x)}\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = dg_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x))\big) \\ &= -\omega_{\phi_t(x)}\big(X_g(\phi_t(x)), X_f(\phi_t(x))\big) = -\{g,f\}(x) = \{f,g\}(x) \ . \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(8) a) L'égalité $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ est évidente sur les 0-formes différentielles (le produit intérieur s'y annule et le produit de Lie préserve les degrés). Pour une différentielle de fonction df, on a $i_Z(df) = df(Z) = \mathcal{L}_Z(f)$, donc, comme la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ et la différentielle extérieure d commutent,

$$(\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X)(df) = (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f) = i_{[X,Y]}(df) \ ,$$

ce qui montre la formule sur les différentielles de fonctions. Comme une dérivée de Lie $\mathcal{L}_Z$ est une dérivation préservant les degrés, et un produit intérieur i_Z une antidérivation, si la formule $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ est vraie sur des formes différentielles α et β, alors elle est vraie sur $\alpha \wedge \beta$. Enfin, les deux membres de l'égalité $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ étant locaux, et comme localement, toute forme différentielle est produit extérieur de fonctions et de différentielle de fonctions, le résultat en découle.

b) Comme ω est non dégénérée, il suffit de montrer que $i_{[X_f,X_g]}\omega = i_{X_{\{f,g\}}}\omega$. Par la formule de Cartan, comme ω est fermée et $d \circ d = 0$ on a

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = (i_{X_f} \circ d + d \circ i_{X_f})\omega = i_{X_f}(d\omega) - d \circ df = 0 \ .$$

Or par a), comme la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{X_f}$ et la différentielle extérieure d commutent, par la question (6), on a

$$\begin{aligned} i_{[X_f,X_g]}\omega &= \mathcal{L}_{X_f} \circ i_{X_g}(\omega) - i_{X_g} \circ \mathcal{L}_{X_f}(\omega) = \mathcal{L}_{X_f}(-dg) = -d\mathcal{L}_{X_f}(g) \\ &= d\{g,f\} = -d\{f,g\} = i_{\{f,g\}}\omega \ . \end{aligned}$$

La première équation en découle.

Par utilisation multiple de la question (6), on a alors

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}\} &= -\mathcal{L}_{X_{\{g,h\}}}(f) = -\mathcal{L}_{[X_g,X_h]}(f) = -\mathcal{L}_{X_g} \circ \mathcal{L}_{X_h}(f) + \mathcal{L}_{X_h} \circ \mathcal{L}_{X_g}(f) \\ &= \mathcal{L}_{X_g}(\{f,h\}) - \mathcal{L}_{X_h}(\{f,g\}) = -\{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\} \ . \end{aligned}$$

L'identité de Jacobi du crochet de Poisson en découle, par anticommutativité.