Analyse complexe et théorie spectrale

Examen partiel du 1 avril 2009

Corrigé

1 Singularité et théorème de Picard

1.1 Théorème de Marty

1. Soit $f \in \mathcal{F}$, $z_0 \in U$ et $A > 0$ tel que $|f(z_0)| \leq A$. Soit $r > 0$ le plus grand rayon tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $|f| < 2A$ sur $D(z_0, r)$. Montrons que si $\delta = dist(z_0, \mathbf{C} \setminus U)$ et $K \subset U$ est le compact $\overline{D(z_0, \delta/2)}$, alors

$$r \geq \min\left(\delta/2, \frac{A}{(1+4A^2)M_K}\right).$$

Si $r \geq \delta/2$ il n'y a rien à montrer. Sinon par continuité de f et définition de r on a $\sup_{D(z_0,r)} |f| = 2A$ et l'hypothèse $(*)$ implique que sur $D(z_0, r)$, $|f'(z)| \leq (1+4A^2)M_K$, et donc que pour tout $z \in D(z_0, r)$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq r(1+4A^2)M_K.$$

Comme $|f(z) - f(z_0)| \geq |f(z)| - |f(z_0)|$ on en déduit en prenant le sup sur $D(z_0, r)$ que $A \leq r(1+4A^2)M_K$, cqfd.

2. Remarquons tout d'abord que si on désigne par $\rho(f)$ la fonction qui à z associe $\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ alors $\rho(1/f) = \rho(f)$ là où f ne s'annule pas.

Par conséquent si la suite $|f_n(z_0)|$ tend vers l'infini alors la suite $1/f_n(z_0)$ est bornée (notons $A = \sup_n 1/|f_n(z_0)|$). Si δ et K sont comme à la question précédente, le même argument qu'à la question **1** montre que pour $r = \min(\delta/2, \frac{A}{(1+4A^2)M_K})$, les fonctions $1/f_n$ sont bien définies (c'est-à-dire f_n ne s'annule pas) et $1/|f_n| \leq 2A$ sur $D(z_0, r)$. La suite $1/f_n$ est donc uniformément bornée sur $D(z_0, r)$. Par le théorème de Montel du cours, pour montrer qu'elle converge uniformément vers 0 sur un voisinage de z_0, il suffit de montrer que sa seule valeur d'adhérence possible est 0. Mais toute telle valeur d'adhérence g s'annule en z_0 alors que $1/f_n$ ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$. Par le théorème d'Hurwitz cela implique que g est identiquement nulle.

La suite $1/f_n$ converge donc uniformément vers 0 sur le voisinage $D(z_0, r)$ de z_0, et donc f_n converge uniformément vers ∞ sur ce voisinage.

3. Notons U_b l'ensemble des z_0 dans U tels que la suite $f_n(z_0)$ est bornée. U_b est ouvert par **1** et $U \setminus U_b$ est ouvert par **2**. Par connexité de U, U_b est donc égal à U ou à $\emptyset$. Autrement dit, si une suite de fonctions de $\mathcal{F}$ n'est pas bornée en un point, elle n'est bornée en aucun point.

Si $U_b = U$ on a même par **1** que f_n est uniformément bornée sur tout compact de U. Par le théorème de Montel on peut donc bien en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.

Supposons que $U_b = \emptyset$. Fixons $z_0 \in U$ et soit (g_n) une sous-suite de (f_n) telle que $|g_n(z_0)| \to \infty$. Soit $z \in U$; si $g_n(z)$ ne tend pas vers ∞, alors on pourrait extraire une sous-suite (h_n) de (g_n) telle que $h_n(z)$ est bornée alors que $|h_n(z_0)| \to \infty$, ce qui contredit la remarque précédente. La suite g_n converge vers ∞ en tout point. Le fait que la convergence est uniforme sur tout compact découle de **2**.

4. On raisonne par l'absurde : si $\{f^*\sigma, f \in \mathcal{F}\}$ ne sont pas uniformément bornées sur K, alors il y a une suite (f_n) d'élements de $\mathcal{F}$ telle que $\sup_{z \in K} f_n^*\sigma(z) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Comme $\mathcal{F}$ est normale, on peut extraire de la suite f_n une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact ou bien qui diverge uniformément sur tout compact.

Dans le premier cas, quitte à remplacer (f_n) par la dite sous-suite, on a donc que f_n converge uniformément sur tout compact. En particulier la suite (f_n') est bornée uniformément sur K, ce qui contredit le fait que $\sup_K f_n^*\sigma \to \infty$

Dans le second cas, on peut encore supposer que $|f_n| \to \infty$ uniformément sur tout compact. En particulier, si V est un voisinage de K relativement compact dans U, on a que pour n assez grand, f_n ne s'annule pas sur V et $1/f_n \to 0$ uniformément sur V. Par le même argument que précédemment, on a donc que $\sup_n \sup_{z \in K} (1/f_n)^*\sigma(z) < \infty$. Or on a déjà remarqué que $(1/f_n)^*\sigma = f_n^*\sigma$; ceci contredit le fait que $\sup_K |f_n^*\sigma| \to \infty$.

1.2 Théorème de Montel

1. L'application $\varphi : z \mapsto (z-a)/(z-b)$ est une bijection holomorphe de $\mathbf{C} \setminus \{a,b\}$ sur $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$. Soit $\mathcal{F}' = \{\varphi \circ f, f \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{F}'$ est normale si et seulement si $\mathcal{F}$ l'est, et $\mathcal{F}'$ est une famille de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$. Il suffit donc de traiter le cas $a = 0, b = 1$.

Si on sait que le théorème de Montel est vrai quand U est une boule, on peut le déduire lorsque U est une réunion finie de boules : $U = U_1 \cup \ldots U_p$. En effet dans ce cas si f_n est une suite dans $\mathcal{F}$, alors par le théorème de Montel pour la boule U_1 on peut en extraire une sous-suite qui converge ou diverge (uniformément sur tout compact) sur U_1. De cette sous-suite on peut extraire une sous-suite qui converge ou diverge (uniformément sur tout compact) aussi sur U_2. En faisant p extractions successives, on obtient bien une sous-suite telle que pour tout $i = 1, \ldots, p$, la restriction à U_i converge ou diverge (uniformément sur tout compact). Par connexité de U on a que le fait de converger ou diverger sur U_i ne dépend pas de i. Pour le cas général, il suffit de prendre une suite exhaustive de compacts de U et de faire un argument d'extraction diagonale.

Il suffit de remplacer $\mathcal{F}$ par $\{z \mapsto f(\alpha z + z_0), f \in \mathcal{F}\}$ pour se ramener au cas où $\alpha = 1$ et $z_0 = 0$.

2. Il suffit de calculer le Laplacien de $\log(\mu(z))$. Un calcul facile montre en effet que

$$\Delta(z \mapsto \log|z|) = 0$$

et

$$\Delta\big(z \mapsto \log(1 + |z|^\alpha)\big) = \frac{\alpha^2 |z|^{\alpha-2}}{(1+|z|^\alpha)^2}.$$

Pour $\alpha = 1/3$, $\alpha - 2 = 5/3$; on en déduit que

$$\Delta\mu(z) = \frac{1}{18}\left(\frac{1}{|z|^{5/3}(1+|z|^{1/3})^2} + \frac{1}{|z-1|^{5/3}(1+|z-1|^{1/3})^2}\right).$$

La fonction $\kappa_\mu = -\Delta\mu/\mu^2$ est donc continue et strictement négative sur $\mathbf{C} \setminus \{0,1\}$. Pour montrer que $-C_\mu = \sup_{\mathbf{C}\setminus\{0,1\}} \kappa_\mu < 0$, il suffit donc de montrer que pour $z_0 = 0, 1$ ou ∞,

$$\limsup_{z\to z_0} \kappa_\mu(z) < 0.$$

Quand $z \to 0$, $\Delta\mu(z) \sim |z|^{-5/3}/18$ et donc $\kappa_\mu(z) = -\Delta\mu(z)/\mu(z)^2 \to -1/36 < 0$. De même $\kappa_\mu(z) \to -1/36$ quand $z \to 1$.

Quand $|z| \to \infty$, $\Delta_\mu(z) \sim |z|^{-7/3}/9$ alors que $\mu(z)^2(z) \sim |z|^{-8/3}$. Donc $\kappa_\mu(z) \sim -|z|^{1/3}/9 \to -\infty$.

Cela conclut donc la preuve l'existence de $-C_\mu < 0$ tel que $\kappa_\mu(z) \leq -C_\mu$ pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus \{0,1\}$.

Pour la deuxième inégalité, comme μ/σ est continue et strictement négative sur $\mathbf{C}\setminus\{0,1\}$, il suffit de montrer que $\liminf_{z\to z_0} \mu(z)/\sigma(z) > 0$ pour $z_0 = 0, 1$ et ∞. Mais dans chacun de ces cas, cette lim inf est en fait une limite et est égale à $+\infty$ (pour $z_0 = \infty$, noter que $\mu(z) \sim |z|^{-4/3}$ et que $4/3 < 2$).

3. Voir le cours.

4. Par le **2**, $f_\sigma^* \leq C_\sigma f_\mu^*$. Il suffit d'appliquer le **3** pour trouver une constante $C = 2C_\sigma/\sqrt{C_\mu}$ telle que $f_\sigma^* \leq C\rho_0$ pour tout $z \in B(0,1)$.

En particulier comme tout compact de $B(0,1)$ est contenu dans une boule $B(0,r)$ pour un $0 < r < 1$ la famille f_σ^* est uniformément bornée sur tout compact. Le théorème de Marty implique que $\mathcal{F}$ est normale.

1.3 Preuve du théorème de Picard

1. La famille $\{f_n, n \geq 0\}$ est une famille de fonctions holomorphes sur B^* à valeurs dans $\mathbf{C} \setminus \{a,b\}$. Par le théorème de Montel c'est une famille normale. D'où l'existence d'une sous-suite de (f_n) qui converge ou diverge uniformément sur tout compact de B^*.

2. Si (g_n) converge uniformement sur tout compact, en particulier si K est le cercle de centre 0 de rayon $1/2$, la suite des restrictions de g_n à K est uniformément bornée (disons par A). Si $g_n = f_{\phi(n)}$, considérons la restriction de f à l'anneau $U_n = \{z, 1/(2\phi(n+1)) < |z| < 1/(2\phi(n))$. On a que f est continue sur $\overline{U_n}$ et que $|f| \leq A$ sur ∂U_n. Par le principe du maximum, $|f| \leq A$ sur $\overline{U_n}$. Comme $\phi(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a que $|f| \leq A$ sur $\cup_{n\geq 1}\overline{U_n} = \{z \in \mathbf{C}, 0 < |z| < 1/2\phi(1)\}$. La singularité de f en 0 est donc éliminable puisque f est bornée au voisinage de 0.

3. Si (g_n) diverge uniformément sur tout compact de B^*, alors la suite $1/(g_n - a)$ est bien définie car g_n ne prend pas la valeur a et elle converge uniformément vers 0 sur tout compact de B^*. Par la question précédente on obtient que 0 est une sigularité éliminable de $1/(f(z)-a)$, et donc que f a un pôle en 0.

4. Soit f comme dans l'énoncé du théorème de Picard, et $s \in]0,1[$. Si l'image de $B(0,s) \setminus \{0\}$ omet deux valeurs distinctes a et b, les questions précécentes appliquées à la fonction $z \in$

$B(0,1) \setminus \{0\} \mapsto f(sz)$ impliquent que la singularité de f est 0 est éliminable ou un pôle, ce qui contredit l'hypothèse. L'image de $B(0,s) \setminus \{0\}$ par f omet donc au plus un point.

2 Équation de Bezout

1. La fonction G est clairement holomorphe ; comme l'ensemble des z tels que $F(z) \neq 0$ est d'intérieur vide il suffit de calculer $G(z)$ pour z tel que $F(z) \neq 0$.

De plus pour z tel que $F(z) \neq 0$ la singularité de $\xi \mapsto \frac{F(\xi)-F(z)}{F(\xi)(\xi-z)}$ en z est éliminable. Donc pour un tel z la formule des résidus implique que

$$G(z) = \sum_{a\in B(0,1), F(a)=0} Res(\frac{F(\cdot)-F(z)}{F(\cdot)(\cdot - z)}, a) = \sum_{a\in B(0,1), F(a)=0} Res(\frac{-F(z)}{F(\cdot)(\cdot - z)}, a)$$

car $1/(\xi - z)$ est holomorphe en $\xi = a$.

On est ramené à montrer que pour a tel que $F(a) = 0$ la fonction $z \mapsto Res(F(z)/(F(\cdot)(\cdot - z)), a)$ définie pour $z \neq a$ s'étend en une fonction holomorphe sur $B(0,1)$ et est dans l'idéal engendré par f_1 et f_2. Mais $F(a) = 0$ si et seulement si $f_1(a) = 0$ ou $f_2(a) = 0$. Supposons par exemple que $f_1(a) = 0$ (l'autre cas est traité de façon identique). Alors $f_2(a) \neq 0$ et cette fonction est égale à $f_2(z)Res(f_1(z)/(f_1 f_2(\cdot)(\cdot - z)), a)$. Il suffit donc de montrer que si $f_2(a) \neq 0$ la fonction $\varphi_a : z \mapsto Res(f_1(z)/(f_1 f_2(\cdot)(\cdot - z)), a)$ est holomorphe. On peut bien sûr calculer explicitement φ_a à partir du développement en séries de Laurent de $1/F$ en a, mais on peut aussi raisonner de la façon suivante : par la formule des résidus pour tout $\delta > 0$ assez petit (tel que a est l'unique zero de F sur $B(a,\delta)$) et z tel que $|z-a| > \delta$, si C_δ désigne le cercle de centre a de rayon δ parcouru dans le sens direct,

$$\varphi_a(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\delta} \frac{f_1(z)}{f_1(\xi) f_2(\xi)(\xi - z)} d\xi.$$

φ_a est donc holomorphe sur $B(0,1) \setminus \overline{B}(a,\delta)$ pour tout $\delta > 0$, donc sur $B(0,1) \setminus \{a\}$; pour prouver qu'elle est holomorphe sur $B(0,1)$ il suffit de vérifier que φ_a est bornée au voisinage de a. Soit m la multiplicité du zéro de f_1 en a, de telle sorte qu'il existe $C > 0$ tel que $|f_1(\xi)| \sim C|\xi - a|^m$ quand $\xi \to a$. En prenant pour $\delta = |z-a|/2$ pour $\xi \in C_\delta$ on a que $|f_1(z)|/f_1(\xi)| \sim 2^m/|f_2(a)|$ quand $z \to a$. L'inégalité triangulaire dans l'équation précédente et le fait que $1/f_2$ est bornée au voisinage de a implique donc que quand $z \to a$

$$|\varphi_a(z)| = 0(1).$$

On a prouvé que φ_a est une fonction holomorphe sur $B \setminus \{a\}$ et est bornée au voisinage de a ; elle est donc holomorphe sur B.

2. L'équation à prouver découle immédiatement de la formule

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{F(\xi)}{F(\xi)(\xi - z)} d\xi = Ind(z, \partial B^+) = 1.$$

3. La fonction $z \in B \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B^+} \frac{d\xi}{F(\xi)(\xi - z)}$ étant holomorphe, la question **2**, implique que $1 - G$ est dans l'idéal engendré par f_1 et f_2. Par la question **1**, G appartient aussi à cet idéal ;

1 appartient donc à cet idéal, d'où l'existence de fonctions g_1 et g_2 holomorphes sur B telles que $1 = f_1 g_1 + f_2 g_2$.

4. Pour $R > 0$ on note ∂B_R^+ le cercle de centre 0 de rayon R parcouru dans le sens direct et on définit G_R comme dans l'énoncé en remplaçant ∂B^+ par ∂B_R^+ et $f_1 f_2$ par $P_1 P_2$. Soit A tel que tous les zéros de P_1 et Q_1 sont dans $B(0, A)$. Alors si $R, R' > A$ et $|z| < R, R'$, les lacets ∂B_R^+ et $\partial B_{R'}^+$ sont homotopes dans $\mathbf{C}$ privé de z et des zéros de $P_1 P_2$. Donc $G_R(z) = G_{R'}(z)$. La condition $deg(P_1) > 0$ implique que $|F(\xi)| \to \infty$, et donc à z fixé on a quand $|\xi[\to \infty$

$$\frac{1}{F(\xi)} \frac{F(\xi) - F(z)}{\xi - z} \sim \frac{1}{\xi - z}.$$

Et donc $G_R(z) = \lim_{R' \to \infty} G_{R'(z)} = \lim_{R' \to \infty} Ind(z, \partial B_{R'}^+) + o(1) = 1$ par le théorème de convergence dominée.

Fixons maintenant R et z tels que $R > \max(|z|, A)$ et $P_1(z) P_2(z) \neq 0$. La preuve de la question **1** implique que $1 = G_R(z) = P_1 \widetilde{Q}_1 + P_2 \widetilde{Q}_2$ oú

$$\widetilde{Q}_1(z) = \sum_{a, P_2(a) = 0} Res \left(\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z)}{z - \cdot}, a \right),$$

$$\widetilde{Q}_2(z) = \sum_{a, P_1(a) = 0} Res \left(\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_1(z)}{z - \cdot}, a \right).$$

Pour prouver que $Q_1 = \widetilde{Q}_1$ on remarque que si $P_2(a) = 0$ la fonction

$$\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z)}{z - \cdot} - \frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z) - P_2}{z - \cdot} = \frac{1}{P_1} \frac{1}{z - \cdot}$$

est holomorphe en a (car $z \neq a$ et $P_1(a) \neq 0$), ce qui implique bien $Q_1(z) = \widetilde{Q}_1(z)$. De même $Q_2(z) = \widetilde{Q}_2(z)$.

On a donc prouvé que si $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$ sur $\mathbf{C}$ privé des zéros de P_1 et P_2. Comme les fonctions Q_1 et Q_2 sont holomorphes (on va vérifier qu'elles sont polynomiales), elles sont en particulier continues et l'équation $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 = 1$ est vérifié sur $\mathbf{C}$.

Vérifions que Q_1 est un polynôme (pour Q_2 c'est pareil). Cela découle du fait que pour $(P_2(z) - P_2(\xi))/(z - \xi)$ est un polynôme en les variables z et ξ (par linéarité il suffit de le vérifier pour $P_2 = X^k$ et alors c'est clair puisque $(z^k - \xi^k)/(z - \xi) = \sum_{i=0}^{k-1} z^i \xi^{k-1-i}$). Il y a donc des polynômes $R_0, \ldots R_N$ tels que $(P_2(z) - P_2(\xi))/(z - \xi) = \sum_{k=0}^{N} z^k R_k(\xi)$. Donc

$$Res \left(\frac{1}{P_1 P_2} \frac{P_2(z) - P_2}{z - \cdot}, a \right) = \sum_{k=0}^{N} z^k Res \left(\frac{R_k}{P_1 P_2}, a \right),$$

et

$$Q_1(z) = \sum_{k=0}^{N} z^k \sum_{a, P_2(a) = 0} Res \left(\frac{R_k}{P_1 P_2}, a \right)$$

est bien une fonction polynômiale en z.