Ecole Normale Supérieure **2007-2008**
Première année de Master FIMFA

Partiel d'Analyse Fonctionnelle et EDP

Eléments de correction

Exercice 1. Soit E un espace de Banach réflexif et strictement convexe, cela signifie que $\|(x+y)/2\| < 1$ pour tout $x, y \in B_E$, $x \neq y$. Soit $K \subset E$ un convexe fermé non vide de E. Montrer qu'il existe une application $p_K : E \to K$ telle pour tout $u \in E$

$$(1) \qquad \|u - p_K u\| = \min_{y \in K} \|u - y\|.$$

Correction de l'exercice 1. Soit (y_n) une suite minimisante: $\|u - y_n\| \searrow I := \inf_{z\in K} \|u - z\|$, $y_n \in K$. Comme (y_n) est une suite bornée (par $\|u\| + \|u - y_1\|$) d'un espace réflexif, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement $\sigma(E, E')$: $\exists\,(y_{n'})$, $\exists\, y$ telles que $y_{n'} \rightharpoonup y$ faiblement dans E. K étant convexe et fermé, il est fermé au sens de la convergence faible, donc $y \in K$ et $\|u - y\| \geq I$. Comme $y_n - u \rightharpoonup y - u$ faiblement $\sigma(E, E')$, un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus affirme que $\|y - u\| \leq \liminf \|y_n - u\| = I$. Donc $\|u - y\| = \min_{z\in K} \|u - z\|$. Enfin, si $y' \in K$ réalise également $\| - y'\| = I$ alors nécessairement $y' = y$, car dans le cas contraire on aurait $\|u - (y + y')/2\| = \|(u - y)/2 + (u - y')/2\| < I$ par hypothèse de stricte convexité, et cela est absurde. En conclusion, on a bien définie une application $E \to K$, $u \mapsto p_K u := y$ qui réalise (1). $\square$

Exercice 2. Soit E un espace de Banach et $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer qu'il y a équivalence entre
(i) ϕ est continue;
(ii) ϕ est séquentiellement continue;
(iii) ϕ est faiblement $\sigma(E, E')$ continue;
(iv) ϕ est séquentiellement continue pour la convergence faible $\sigma(E, E')$.
Exhiber un espace de Banach E tel que $Id : (E, \sigma(E, E')) \to (E, \|.\|_E)$ est séquentiellement continue mais pas continue (On pourra accepter sans avoir à le redémontrer un résultat présenté en TD).

Correction de l'exercice 2. On a $(i) \Leftrightarrow (ii)$ car la topologie de E est métrique. On a $(iv) \Rightarrow (ii)$ car la convergente forte implique la convergence faible. On a $(iii) \Rightarrow (iv)$ car cela est toujours vrai! (quelque soit l'espace topologique considéré). Enfin, $(i) \Rightarrow (iii)$ car la topologie $\sigma(E, E')$ est précisément la topologie qui rend continue les applications linéaires continues de E (les éléments de E').
L'application $Id : (\ell^1, \sigma(\ell^1, \ell^\infty)) \to (\ell^1, \|.\|_\ell^1)$ est séquentiiellement continue d'après le lemme de Schur, mais n'est pas continue, par exemple parce que la boule $\{x \in \ell^1; \|x\|_{\ell^1} < 1\}$ est fortement ouverte mais pas ouverte au sens de la topologie faible. $\square$

Exercice 3. Soient $p \in [1, \infty]$, et $\alpha = (\alpha_n)$ une suite de réels. Montrer que si $\sum_n \alpha_n \, x_n < \infty$, pour tout $x = (x_n) \in \ell^p$, alors $\alpha \in \ell^{p'}$, avec $1/p' + 1/p = 1$. En déduire que $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ si $p \in]1, \infty[$.

Correction de l'exercice 3. Considérons $\varphi_N : \ell^p \to \mathbb{R}$ l'application linéaire continue $\varphi_N(x) := \sum_{1 \le n \le N} \alpha_n \, x_n$. Par hypothèse $\forall \, x \in \ell^p$

$$\sup_N |\varphi_N(x)| < \infty.$$

[Remarque. Dans l'énoncé il faut lire que $\sum_n \alpha_n \, x_n$ converge. On peut également lire, pour tout $x \in \ell^p \; \exists \, C_x$ tel que $\sup_N \varphi_N(x) \le C_x$ et on arrive à la même conclusion en prenant $max(C_x, C_{-x})$]. Par le théorème de Banach-Steinhaus, on déduit qu'il existe C telle que

$$\sup_N \|\varphi_N\|_{(\ell^p)'} \le C$$

Pour $p \neq 1, \infty$, on choisit $X_n^N := (sign \, \alpha_n) \, |\alpha_n|^{\theta - 1} \, \mathbf{1}_{n \le N}$ ce qui donne

$$\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^\theta = \varphi_N(X^N) \le C \, \|X^N\|_{\ell^p} = C \, \left(\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^{(\theta - 1) \, p} \right)^{1/p}.$$

En prenant θ de sorte que $\theta + 1 = \theta \, p$, et donc $\theta = p'$, on obtient

$$\forall \, N \qquad \left(\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^{p'} \right)^{1/p'} \le C,$$

et donc $\alpha \in \ell^{p'}$. Le cas $p = \infty$ se traite de la même manière, et dans le cas $p = 1$ on choisit $X_{n_N}^N = sign \, \alpha_{n_N}$, $X_n^N = 0 \; \forall \, n \neq n_N$ et n_N satisfait $|\alpha_{n_N}| = \max_{1 \le n \le N} |\alpha_n|$.

Soit $\varphi : \ell^p \to \mathbb{R}$ linéaire continue. On pose $\alpha_n := \varphi(\delta_n)$ avec $(\delta_n)_i = \delta_{ni}$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^p$, **ici on a besoin de $p < \infty$!**, on a

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N x_n \, \delta_n \text{ dans } \ell^p \quad \text{et} \quad \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N x_n \, \alpha_n = \varphi(x) < \infty.$$

On en déduit $\alpha \in \ell^{p'}$, et donc $(\ell^p)'$ est isomorphe à $\ell^{p'}$, et l'isomorphisme est $\Phi : (\ell^p) \to \ell^{p'}$, $\varphi \mapsto \Phi(\varphi) = (\varphi(\delta_n))_{\ge 1}$. □

Exercice 4. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad - \Delta \, u + u = f \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^N.$$

a) - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ il existe une unique solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ à (1).
b) - Montrer que si $u, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ satisfont (1) alors $\|u\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
c) - En déduire pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ l'existence d'une solution $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ à (1).

Correction de l'exercice 4. a) - Si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est solution de (2) alors

$$\hat{f} = \mathcal{F}(- \Delta \, u + u) = (|\xi|^2 + 1) \, \hat{u},$$

et donc

$$(3) \qquad u = T\,f := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{1+|\xi|^2}\right).$$

Inversement, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ alors $T\,f \in \mathcal{S}^N$ et $T\,f$ est solution de (2).
b) - L'idée est de multiplier l'équation par $u\,|u|^{p-2}$ et d'intégrer. Plus "naturellement", pour $p \in [2,\infty)$ on a

$$|u|^p = (f + \Delta\,u)\,u\,|u|^{p-2} = f\,u\,|u|^{p-2} + \mathrm{div}\,(u\,|u|^{p-2}\Delta u) - (p-2)\,|\nabla u|^2\,|u|^{p-2}.$$

Comme le terme "en divergence" s'annule lorsqu'on intègre, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\,u\,|u|^{p-2} - (p-2)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,|u|^{p-2} \le \int_{\mathbb{R}^N} f\,u\,|u|^{p-2} \le \|f\|_{L^p}\,\|u\|_{L^p}^{1/p'},$$

et donc $\|u\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$. En passant à la limite $p \to \infty$ on obtient la même inégalité dans le cas $p = \infty$. Pour traiter le cas $p \in [1,2)$ (pour lequel il n'est pas immédiat que $|\nabla u|^2\,|u|^{p-2} \in L^1$) on introduit une fonction convexe $j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2, $j(0) = 0$, et le même calcul donne

$$u\,j'(u) = f\,j'(u) + \mathrm{div}\,(j'(u)\,\Delta u) - |\nabla u|^2\,j''(u) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^N} u\,j'(u)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^N} f\,j'(u).$$

On prend alors, par exemple, $j(s) = j_\varepsilon(s) = (s^2+\varepsilon)^{p/2} - \varepsilon^{p/2}$ qui est convexe et régulière ($j'(s) = p\,s\,(s^2+\varepsilon)^{p/2-1}$, $j''(s) = p\,(s^2+\varepsilon)^{p/2-2}\,((p-1)\,s^2+\varepsilon)$) puis on passe à la limite $j'_\varepsilon(s) \to j'_0(s) = p\,s\,|s|^{p-2}$. On conclut de la même manière.
c) - Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \neq \infty$, on introduit une suite (f_ε) telle que $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $f_\varepsilon \to f$ dans L^p. On résout $-\Delta\,u_\varepsilon + u_\varepsilon = f_\varepsilon$ grâce à l'étape a) et, puisque l'équation est linéaire, pour tout $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ on a $\|u_{\varepsilon'} - u_\varepsilon\|_{L^p} \le \|f_{\varepsilon'} - f_\varepsilon\|_{L^p}$ grâce à l'étape b). Donc (u_ε) est une suite de Cauchy dans L^p, et converge vers une limite u dans L^p, ce qui permet de passer à la limite dans l'équation (2) écrite au sens des distributions

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon\,(\varphi - \Delta\,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon\,\varphi,$$

et d'obtenir que u est solution de (2), également au sens des distributions.
Dans le cas $p = \infty$, on peut approcher f par une suite (f_ε) telle que $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}$ et $f_\varepsilon \rightharpoonup f$ au sens de la convergence faible $\sigma(L^\infty, L^1)$. Alors la suite (u_ε) de solutions associées est bornée dans L^∞, et donc il existe $u \in L^\infty$ telle que, à extraction d'une sous-suite, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ au sens de la convergence faible $\sigma(L^\infty, L^1)$. On conclut comme précédemment.
Montrons l'unicité. S'il existe deux solutions u_1, $u_2 \in L^p$ alors $u := u_2 - u_1 \in L^p$ satisfait

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} u\,(\varphi - \Delta\,\varphi) = 0.$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on résout $\varphi - \Delta\,\varphi = \psi$ avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ grâce à l'étape a), de sorte que

$$\forall\,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} u\,\psi = 0.$$

Cela implique $u = 0$. $\square$

Problème 5. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\lambda > 0$ et $R \in SO(\mathbb{R}^N)$ une rotation de $\mathbb{R}^N$. On définit la distribution dilatatée $\delta_\lambda T$ par $\langle \delta_\lambda T, \varphi \rangle = \lambda^N \langle T, \delta_{\lambda^{-1}} \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec $(\delta_\lambda \varphi)(x) = \varphi(x/\lambda)$. On dit que T est positivement homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si $\forall \lambda > 0$ $\delta_\lambda T = \lambda^{-\alpha} T$ [**Attention à la convention!**]. On définit la distribution $\rho_R T$ par $\langle \rho_R T, \varphi \rangle = \langle T, \rho_{R^{-1}} \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec $(\rho_R \varphi)(x) = \varphi(R^{-1} x)$. On dit que T est invariant par rotation si $\forall R \in SO(\mathbb{R}^N)$ on a $\rho_R T = T$.

1) Le but de cette question est de démontrer que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ est telle que la distribution $\{f\}$ associée est homogène de degré $\beta > -N$ et invariante par rotation, alors il existe C tel que $f(x) = C\,|x|^\beta$ p.p. $x \in \mathbb{R}^N$.

a) - Faire la preuve dans le cas $f \in C(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$.

b) - Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$F(x) := \int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy = \int_0^{|x|} \int_{S^{N-1}} f(r\,\sigma)\,d\sigma\, r^{N-1}\,dr$$

est homogène de degré $\beta + N$ et conclure [On pourra utiliser que la mesure $d\sigma$ est invariante par rotation].

2) Pour $\alpha \in]0, N[$ on note $\phi_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$. Pourquoi $\mathcal{F}(\phi_\alpha)$ est-elle bien définie? Montrer que $\mathcal{F}(\phi_\alpha)$ est invariante par rotation et homogène de degré $\alpha - N$.

3) Montrer que $\mathcal{F}(\phi_\alpha) \in L^2 + L^\infty$ si $\alpha \in]N/2, N[$. En déduire (à la détermination d'une constante près) la transformée de Fourier de $|x|^{-\alpha}$ pour tout $\alpha \in]N/2, N[$, $\alpha \in]0, N/2[$, puis $\alpha = N/2$.

Correction de l'exercice 5. 1a) - Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ homogène de degré $\beta > -N$ et invariante par rotation. On a d'une part

$$\forall \lambda > 0 \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda\,x)\,\varphi(x)\,dx = \lambda^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\varphi(\lambda^{-1}\,x)\,dx \overset{\{f\}\ \beta\text{-homogène}}{=} \lambda^\beta \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ce qui implique $f(\lambda\,x) = \lambda^\beta\, f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, $\forall \lambda > 0$. On a d'autre part

$$\forall R \in SO(\mathbb{R}^N) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f(R\,x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\varphi(R^{-1}\,x)\,dx \overset{\{f\}\ \text{inv. rotation}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ce qui implique $f(R\,x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, $\forall R \in SO(\mathbb{R}^N)$. On conclut que $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ $f(x) = f(|x|, 0, ..., 0) = |x|^\beta\, f(1, 0, ..., 0)$.

1b) Lorsque l'on suppose seulement $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ la même preuve montre que

- f est invariante par rotation si, et seulement si,

$$\forall R \in SO(\mathbb{R}^N) \qquad f(R\,x) = f(x) \text{ pour p.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

- f est homogène de degré β si, et seulement si,

$$\forall \lambda > 0 \qquad f(\lambda\,x) = \lambda^\beta\, f(x) \text{ pour p.t. } x \in \mathbb{R}^N,$$

On voudrait inverser les $\forall$ et les *p.p.* pour conclure, ce qui n'est bien sûr pas possible sans justification! Une idée serait de régulariser le problème, de conclure sur le problème régularisé et de passer ensuite à la limite. Cela est effectivement possible, mais nous allons procéder un peu différemment.

• Acceptons un instant qu'il existe $g \in L^1([0,\infty);\, r^{N-1}\,dr)$ telle que

$$(4) \qquad f(x) = g(|x|) \quad \text{p.p.}\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Il est clair que g est encore homogène de degré β sur $(0,\infty)$. En effet, pour $\lambda > 0$ fixé et pour tout $\psi \in C_c((0,\infty))$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(\lambda\, r)\,\psi(r)\,r^{N-1}\,dr &= |S^{N-1}|^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda\, x)\,\psi(|x|)\,dx \\ &= \lambda^\beta |S^{N-1}|^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\psi(|x|)\,dx = \lambda^\beta \int_0^\infty g(r)\,\psi(r)\,r^{N-1}\,dr,\end{aligned}$$

ce qui implique $g(\lambda\, r) = \lambda^\beta\, g(r)$ p.p. $r \in (0,\infty)$. On définit alors

$$G(r) := \int_0^r g(s)\,s^{N-1}\,ds.$$

Il est clair que la fonction G est continue sur $(0,\infty)$ et que G est homogène de degré $\beta+N$, puisque pour tout $\lambda > 0$ et tout $r > 0$

$$G(\lambda\, r) = \int_0^{\lambda\, r} g(s)\,s^{N-1}\,ds = \lambda^N \int_0^r g(\lambda\, u)\,u^{N-1}\,du = \lambda^{\beta+N}\,G(r).$$

On en déduit que $G(r) = C\,r^{\beta+N}$ grâce à l'étape 1a). Or si $u \in L^1_{loc}([0,\infty))$ et $U(x) := \int_0^x u(y)\,dy$, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}((0,\infty))$ on a

$$\begin{aligned}\langle U, \varphi'\rangle &= \int_0^\infty \left\{\int_0^x u(y)\,dy\right\}\varphi'(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty u(y)\left\{\int_y^\infty \varphi'(x)\,dx\right\}dy = -\int_0^\infty u(y)\,\varphi(y)\,dy,\end{aligned}$$

de sorte que $U \in W^{1,1}_{loc}([0,\infty))$ et $\{U\}' = u$. Ainsi $G \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $r \mapsto r^{\beta+N} \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}_+)$ et on en déduit

$$g(r)\,r^{N-1} = G'(r) = C\,(\beta+N)\,r^{\beta+N-1} \quad \text{p.p. } r > 0.$$

• Revenons à (4). Lorsque $N = 1$, on a $SO(\mathbb{R}) = \{\text{symétrie par rapport à } 0\}$, donc $f(-x) = f(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$ et (4) est vraie avec $g(r) := f(r)\ \forall r > 0$. Lorsque $N = 2$, on définit la famille de rotations (qui est une paramétrisation de l'ensemble des rotations)

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

On commence par remarquer, qu'en notant $\theta_x \in (0,2\pi)$ l'angle tel que $R_{\theta_x}\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$, et en notant $\sigma = \sigma(\theta) = e^{i\,\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, on a pour toute fonction $\varphi \in C(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \varphi(R_\theta\, x)\,d\theta &= \int_{\theta_x}^{2\pi+\theta_x} \varphi(R_\theta\, x)\,d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi(R_\alpha\, R_{\theta_x}\, x)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \varphi(R_\alpha \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix} d\alpha = \int_{S^1} \varphi(|x|\,\sigma)\,d\sigma.\end{aligned}$$

Par hypothèse d'invariance par rotations on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ fixée

$$\langle f, R_\theta \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\, \theta \in (0, 2\pi).$$

On en déduit en intégrant en $\theta \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}
2\pi\, \langle f, \varphi\rangle &= \int_0^{2\pi} \langle f, R_\theta \varphi\rangle\, d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \left\{ \int_0^{2\pi} \varphi(R_\theta\, x)\, d\theta \right\} dx \\
&= \int_0^\infty \int_{S^1} f(r\,\omega) \left\{ \int_{S^1} \varphi(r\,\sigma)\, d\sigma \right\} r\, dr d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \left\{ \int_{S^1} f(r\,\omega)\, d\omega \right\} dy,
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que

$$f(x) = g(|x|) \text{ p.t. } x \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } g(r) := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(r\,\omega)\, d\omega.$$

Il est possible de généraliser la méthode modulo une bonne paramétrisation de $SO(\mathbb{R}^N)$ pour $N \geq 3$.

• Démontrons le résultat en suivant une méthode de "régularisation". Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on introduit la fonction régularisée

$$\forall x \neq 0 \qquad F_\varepsilon(x) := \varepsilon^{1-N} \int_{\mathcal{C}_\varepsilon(x)} f(y)\, dy = \int_0^{|x|} (r/\varepsilon)^{N-1} \int_{S_1(e_x,\varepsilon)} f(r\, z)\, d\sigma_1(z)\, dr$$

où $\mathcal{C}_\varepsilon(x)$ est le cône

$$\mathcal{C}_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\},\ |y| \leq |x|,\ |e_y - e_x| \leq \varepsilon\},$$

et $S_1(e_x, \varepsilon)$ est le bout de sphère

$$S_1(e_x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^N,\ |y| = 1,\ |y - e_x| \leq \varepsilon\},$$

Il est clair que $F_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ car $\mathcal{C}_\varepsilon(x_n) \to \mathcal{C}_\varepsilon(x)$ au sens où mes $\{y \in \mathbb{R}^N;\ y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x_n) \backslash \mathcal{C}_\varepsilon(x)$ ou $y \in \mathcal{C}_\varepsilon(x) \backslash \mathcal{C}_\varepsilon(x_n)\} \to 0$ si $x_n \to x \neq 0$. De plus $F_\varepsilon(R\, x) = F_\varepsilon(x)\ \forall\, R \in SO(\mathbb{R}^N)$, car $\mathcal{C}_\varepsilon(R\, x) = R\, \mathcal{C}_\varepsilon(x)$, et $F_\varepsilon(\lambda\, x) = \lambda^{\beta+N}\, F_\varepsilon(x)\ \forall\, \lambda > 0$ car $\mathcal{C}_\varepsilon(\lambda\, x) = \lambda^N\, \mathcal{C}_\varepsilon(x)$. Il existe donc $C_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $F_\varepsilon(x) = C_\varepsilon\, |x|^{\beta+N}\ \forall\, x \in \mathbb{R}^N$. En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient qu'il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$F(x) = G(|x|, \hat{x}) = C_0\, |x|^{\beta+N} \ \ p.p.\ x \in \mathbb{R}^N,$$

avec

$$\hat{x} = x/|x| \quad \text{et} \quad G(r, \hat{x}) := \int_0^r u^{N-1}\, f(u\, \hat{x})\, du.$$

Comme par Fubini, $u \mapsto u^{N-1}\, f(u\, \hat{x}) \in L^1(0, \infty)$ pour p.t. $\hat{x} \in S^{N-1}$, on en déduit que $r \mapsto G(r, \hat{x}) \in W^{1,1}(0, \infty)$ pour p.t. $\hat{x} \in S^{N-1}$, et donc $\frac{\partial G}{\partial r}(|x|, \hat{x}) = |x|^{N-1}\, f(x) = C_0\, (\beta + N)\, |x|^{\beta+N-1}$ pour p.t. $x \in \mathbb{R}^N$.

2) Pour $\alpha \in]0, N[$, $\phi_\alpha \in L^1 + L^\infty \subset \mathcal{S}'$ et donc $\mathcal{F}(\phi_\alpha)$ est-elle bien définie comme distribution tempérée. Pour tout $R \in SO(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\langle \rho_R \hat{\phi}_\alpha, \varphi \rangle = \langle \phi_\alpha, \mathcal{F}(\rho_{R^{-1}} \varphi) \rangle = \langle \phi_\alpha, \rho_R \hat{\varphi} \rangle = \langle \rho_{R^{-1}} \phi_\alpha, \hat{\varphi} \rangle = \langle \phi_\alpha, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{\phi}_\alpha, \varphi \rangle.$$

De même pour tout $\lambda > 0$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a

$$\begin{aligned} \langle \delta_\lambda \hat{\phi}_\alpha, \varphi \rangle &= \lambda^N \langle \phi_\alpha, \mathcal{F}(\varphi(\lambda \cdot)) \rangle = \langle \phi_\alpha, (\hat{\varphi})(\lambda^{-1} \cdot) \rangle = \lambda^N \langle \phi_\alpha(\lambda \cdot), \hat{\varphi} \rangle \\ &= \lambda^{N-\alpha} \langle \phi_\alpha, \hat{\varphi} \rangle = \lambda^{N-\alpha} \langle \hat{\phi}_\alpha, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\hat{\phi}_\alpha$ est homogène de degré $\alpha - N$.

3) Si $\alpha \in]N/2, N[$ alors $\phi_\alpha \in L^2 + L^1$ et donc $\mathcal{F}(\phi_\alpha) \in L^2 + L^\infty$. On en déduit d'après 1) et 2) qu'il existe une constante C_α telle que $\hat{\phi}_\alpha(\xi) = C_\alpha \, |\xi|^{\alpha - N} = C_\alpha \, \phi_{N-\alpha}$ avec $N - \alpha \in]0, N/2[$. Comme $\phi_{N-\alpha} \in \mathcal{S}'$ et grâce au théorème "d'inversion de la transformée de Fourier" on a $\mathcal{F}(\phi_{N-\alpha}) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(c_1 \, \phi_\alpha) = c_2 \, \phi_\alpha$ pour tout α, $N - \alpha \in]0, N/2[$. Enfin, comme $\phi_\alpha \to \phi_{N/2}$ dans $L^1 + L^\infty$, donc dans s$\mathcal{S}'$, lorsque $\alpha \to N/2$, on en déduit d'une part que $\mathcal{F}(\phi_\alpha) = C_\alpha \, |x|^{\alpha - N} \to \mathcal{F}(\phi_{N/2})$ et donc en particulier pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\varphi > 0$

$$C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha - N} \, \varphi(x) \, dx \to \langle \phi_{N/2}, \hat{\varphi} \rangle.$$

Cela implique que (C_α) est bornée, et à extraction d'une sous-suite, converge vers une limite $C_{N/2}$. Ainsi, $\mathcal{F}(\phi_{N/2}) = C_{N/2} \, \phi_{N/2}$.

Problème 6. (Théorème ergodique de Von Neumann) Soit X un espace de Banach réflexif et soit $T : X \to X$ un opérateur linéaire tel que $\|T\| \leq 1$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$S_n := \frac{Id + T + ... + T^{n-1}}{n}.$$

1) - Soit (u_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $u \in E$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite (v_n) dans l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k \geq n}$ qui converge vers u fortement.

2) - Montrer que $\forall x \in X$, il existe une sous-suite (S_{n_k}) telle que la suite $(S_{n_k} \, x)_k$ converge faiblement dans X vers une limite notée y. Montrer que $\lim_{k \to \infty} (T \, S_{n_k} \, x - S_{n_k} \, x) = 0$. En déduire que la limite faible de la suite $(S_{n_k} \, x)$ est un point fixe de T.

3) - Montrer que $\forall m \geq 1$, $\forall x \in X$, $\lim_{n \to \infty} (S_n \, T^m \, x - S_n \, x) = 0$, et en déduire que $\forall x \in X$, $\forall A \in \text{Conv}(Id, T, ..., T^n, ...)$ on a $\lim_{n \to \infty} (S_n \, A \, x - S_n \, x) = 0$.

4) - Montrer que $\forall x \in X$, $\forall k \geq 1$, $\exists A_k \in \text{Conv}(S_{n_k}, S_{n_{k+1}}, ...)$ telle que la suite $(A_k \, x)$ converge fortement dans X vers y défini au 2).

5) - En déduire que pour tout $x \in X$, la suite $(S_n \, x)$ est convergente dans X fort.

6) - Pour tout $x \in X$, on pose $P(x) = \lim_{n \to \infty} S_n \, x$. Montrer que P est une projection linéaire continue et déterminer son image.

7) - Soit $E = L^2([0, 1[, dx)$. Pour θ irrationnel et $f \in E$, on pose

$$(T_\theta f)(x) = T f \, (x) := f(x + \theta \, (\text{mod } 1)).$$

Vérifier que T satisfait les hypothèses de l'énoncé.

Correction de l'exercice 6. 1) C'est le lemme de Mazur. Soit $A_n := \operatorname{conv}\{u_k,\ k \geq n\}$ l'enveloppe convexe de $\{u_k\}_{k\geq n}$. L'ensemble $F_n = \overline{A_n}$ est un convexe fermé de E, c'est donc un convexe fermé faible de E et donc également un convexe séquentiellement fermé faible de E. Comme $u_k \in F_n$ pour tout $k \geq n$ on en déduit que $u \in F_n$ pour tout n et donc il existe $v_n \in A_n$ tel que (par exemple) $\|v_n - u\| \leq 1/n$.

2) On commence par remarquer que

$$\text{(6.1)} \qquad \forall\, n \qquad \|S_n\| \leq 1.$$

En particulier la suite $(S_n\, x)$ est bornée dans X espace réflexif, et il existe donc $y \in X$ et une sous-suite (S_{n_k}) tels que $S_{n_k}\, x \rightharpoonup y$ au sens de la convergence faible $\sigma(X, X')$. Pour tout $m \geq 1$ et $n \geq 1$ on calcule

$$\text{(6.2)} \qquad \|S_n\, T^m\, x - S_n\, x\| = \frac{1}{n}\, \|(T^{m+n-1} + ... + T^{n+1} - T^{m-1} - ... - I)\, x\| \leq \frac{2\, m}{n}\, \|x\| \to 0.$$

En particulier pour $m = 1$, $n = n_k$ et parce que $TS_{n_k} = S_{n_k}T$ on a $\lim_{k\to\infty}(T\, S_{n_k}\, x - S_{n_k}\, x) = 0$. Pour tout $f \in X'$ on a $f \circ T \in X'$ et donc

$$\langle f, T\, S_{n_k}\, x\rangle = \langle f \circ T, S_{n_k}\, x\rangle \to \langle f \circ T, y\rangle = \langle f, T\, y\rangle,$$

et on en déduit $T\, S_{n_k}\, x \rightharpoonup T\, y$ au sens $\sigma(X, X')$. En combinant ce résultat avec le précédent, on obtient $T\, y - y = 0$, et y est un point fixe de T.

3) Par (6.2) on a $\lim_{n\to\infty}(S_n\, T^m\, x - S_n\, x) = 0$ et donc $\lim_{n\to\infty}(S_n\, A\, x - S_n\, x) = 0$ pour tout $A = \theta_0 I + ... + \theta_m\, T^m \in \mathcal{C} := \operatorname{conv}(I, T, ..., T^m, ...)$ avec $\theta_i \geq 0$ et $\sum_i \theta_i = 1$.

4) Le lemme de Mazur appliqué à la suite $(S_{n_j}\, x)$ implique qu'il existe une suite (y_k) de la forme $y_k = \theta_{k,0}\, S_{n_k}\, x + ... + \theta_{k,L}\, S_{n_{k+L_k}}\, x$, $\theta_{k,\ell} \geq 0$ et $\sum_\ell \theta_{k,\ell} = 1$, et telle que $y_k \to y$ fortement dans X lorsque $k \to \infty$. Comme $S_n \in \mathcal{C}$ on a également $A_k := \theta_{k,0}\, S_{n_k} + ... + \theta_{k,L}\, S_{n_{k+L_k}} \in \mathcal{C}$ et donc $y_k = A_k\, x$.

5) Pour tout $\varepsilon > 0$ on fixe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|A_k x - y\| \leq \varepsilon$ grâce à l'étape 4) puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N$ $\|S_n A_k x - S_n\, x\| \leq \varepsilon$ grâce à l'étape 3). On en déduit (on se rappelle que l'on a démontré en 2) que y est un point fixe de T donc de S_n) $\forall\, n \geq N$

$$\begin{aligned} \|S_n\, x - y\| &\leq \|S_n\, x - S_n A_k x\| + \|S_n A_k x - S_n y\| \\ &\leq \|S_n\, x - S_n A_k x\| + \|A_k x - y\| \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui est précisément dire que $S_n x \to y$ fortement dans X.

6) On a vu que $y \in I_T$ l'ensemble des points fixes de X (qui contient déjà $\{0\}$ et qui est un sev de X). Inversement, si $x \in I_T$ alors $S_n x = x\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $P(x) := \lim_n S_n\, x$ est une application bornée (de borne ≤ 1), linéaire (comme limite simple d'applications linéaires) donc continue, et c'est un projecteur d'image $\operatorname{Im} P = I_T$.

7) Le résultat précédent dit que pour tout $f \in L^2(]0,1[)$ on a $S_n f \to P_\theta\, f$ dans L^2 où P_θ est la projection sur les fonctions invariantes par la rotation R_θ: $g(x) = R_\theta g(x) = g(x+\theta)$ p.p. $x \in (0,1)$. Il est clair que si $\theta \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ alors $x + n\,\theta$ est dense dans $(0,1)$, et donc si de plus, $g \in C([0,1])$

alors $R_\theta g = g$ implique g est une fonction constante. Cela est encore vrai pour toute fonction de $L^2(0,1)$. En effet, si $g \in L^2(0,1)$ on introduit sa décomposition en série de Fourier

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{i\,2\pi\,k\,x}, \quad c_n := \int_0^1 g(x)\, e^{-i\,2\pi\,n\,x}.$$

Alors si $R_\theta g = g$ p.p., on a

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad c_n = \int_0^1 g(x+\theta)\, e^{-i\,2\pi\,n\,x}\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_0^1 e^{i\,2\pi\,k\,(x+\theta)}\, e^{-i\,2\pi\,n\,x}\, dx = c_n\, e^{i\,2\pi\,n\,\theta}.$$

Comme $c_n\, e^{i\,2\pi\,n\,\theta} \neq 1$ $\forall\, n \neq 0$, c'est ici qu'intervient l'hypothèse que θ est irrationnel, on a $c_n = 0$ $\forall\, n \neq 0$, et donc g est constant. En conclusion on a montré que

$$\forall\, f \in L^2(0,1) \qquad S_n f \to \int_0^1 f(t)\, dt \quad \text{dans} \quad L^2(0,1).$$

Problème complémentaire: une généralisation. Soient E un espace de Banach et $A : E \to E$ un opérateur linéaire tel que $\|A\| \le 1$. On définit l'opérateur $T_n x := \dfrac{x + Ax + ... + A^{n-1}x}{n}$. On note $F := \{x \in E,\ T_n x \text{ converge},\ n \to \infty\}$, $E_0 := \{x \in E,\ T_n x \text{ converge vers } 0,\ n \to \infty\}$ et $E_1 := \{x \in E,\ T_n x \text{ converge vers } x,\ n \to \infty\}$.
Pour $x \in F$, on pose $Tx := \lim\, T_n x$.

1) - Montrer que F est un s.e.v. de E, T est linéaire et $\|Tx\| \le \|x\|$, pour tout $x \in F$. Montrer que $T(F) \subset F$, et donc $T \in \mathcal{L}(F)$. (Pour $x \in F$ et $f = Tx$, on montrera que $(T_p x)$ est une suite de Cauchy dans E). Montrer que F est fermé.

2) - Montrer que A, T_n et $T \in \mathcal{L}(F)$, et que A, T_n et T commutent. Montrer que T est un projecteur de F, $E_0 = \operatorname{Ker} T$, $E_1 = \operatorname{Im} T$ et $F = E_0 \oplus E_1$. Montrer que $E_0 = \overline{\operatorname{Im}(I-A)}$ et $E_1 = \operatorname{Ker}(I-A)$.

3) - Supposons maintenant E est reflexif, et montrons que $F = E$. On fixe $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in E$ et (n_k) telle que $T_{n_k} x \rightharpoonup y$ dans E. Montrer que $y \in E_1$. Montrer que pour tout $S \in Conv(I, A, A^2, ..., A^p, ...)$, on a $\|T_n S x - T_n x\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer qu'il existe une suite $S_k \in Conv(T_{n_k}, T_{n_{k+1}}, ...)$ telle que $S_k x$ converge fortement vers y dans E (On pensera à utiliser le lemme de Mazur). En déduire que toute la suite $T_n x$ converge vers x fortement dans E, et conclure.

4) - Soit $E = L^p([0,1[, dx)$, $1 \le p \le \infty$. Pour θ irrationnel et $f \in E$, on pose

$$(A_\theta f)(x) = Af\,(x) := f(x + \theta\,(\text{mod } 1)).$$

Vérifier que A satisfait les hypothèses de l'énoncé. Que se passe-t-il pour $1 < p < \infty$, $p = 1$, $p = \infty$.